PROVA - TM^2 2019

Problema 1. (6 pontos) Durante a aula de fatoração, Esmeralda observou que $1, 3$ e 5 podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos, como se pode observar:

$$1 = 1^2 - 0^2$$
$$3 = 2^2 - 1^2$$
$$5 = 3^2 - 2^2$$

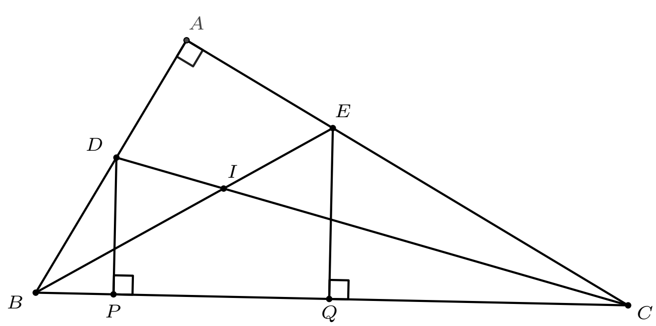
a) Mostre que todos os numeros escritos na forma $2 * m + 1$ podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos consecultivos.

b) Mostre como calcular o valor da expressão

$$E = 1 + 3 + 5 + ... + (2m + 1).$$

c) Esmeralda, contente com o que descobriu, decidiu procurar outras formas de escrever 2019 como a diferença de dois quadrados perfeitos de inteiros positivos. Determine de quantas formas ela pode fazer o que deseja.

Problema 2. (7 pontos) Seja ABC um triângulo retângulo com hipotenusa BC e incentro I. As bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ intersectam os lados AC e AB em D e E, respectivamente. Sejam P e Q os pés das perpendiculares dos pontos D e E ao lado BC. Prove que I é circuncentro de APQ.



Observações: lembre-se que o incentro de um triângulo é o encontro das suas bissetrizes internas e o circuncentro de um triângulo é o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo.

Problema 3. (8 pontos) Dizemos que um inteiro positivo N é agradável se ele satisfaz às seguintes condições:

- Todos os seus algarismos são 1 ou 2;
- Todos os números formados por 3 algarismos consecutivos de N são distintos.

Por exemplo, 121222 é agradável, pois os 4 números formados por 3 algarismos consecutivos de 121222, que são 121,212,122 e 222, são distintos. Porém, 12121 não é agradável. Qual a maior quantidade possível de algarismos que um número agradável pode ter? Qual o maior número agradável que existe?

Problema 4. (9 pontos) Um inteiro positivo n é chamado *bonitinho* quando existe um inteiro positivo m tal que que $m!$ termina em exatamente n zeros.

a) Determine se 2019 é bonitinho.

b) Quantos inteiros positivos menores que 2019 são bonitinhos?

Problema 5. (10 pontos) Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$. Sejam X e K pontos sobre AC e AB, respectivamente, tais que $KX = CX$. A bissetriz de $\angle AKX$ intersecta a reta BC em Z. Mostre que XZ passa pelo ponto médio de BK.