SOLUÇÕES E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO- TM^2 2019

Problema 1. (6 pontos) Durante a aula de fatoração, Esmeralda observou que $1, 3$ e 5 podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos, como se pode observar:

$$1 = 1^2 - 0^2$$
$$3 = 2^2 - 1^2$$
$$5 = 3^2 - 2^2$$

a) Mostre que todos os numeros escritos na forma $2m + 1$ podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos consecultivos.

b) Mostre como calcular o valor da expressão

$$E = 1 + 3 + 5 + ... + (2m + 1).$$

c) Esmeralda, contente com o que descobriu, decidiu procurar outras formas de escrever 2019 como a diferença de dois quadrados perfeitos de inteiros positivos. Determine de quantas formas ela pode fazer o que deseja.

Solução: a) $2m + 1 = ((m + 1) + m)((m + 1) - m) = (m + 1)^2 - m^2$
b) $E = 1 + 3 + 5 + ... + (2m + 1) = 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + ... + (m + 1)^2 - m^2 = (m + 1)^2$
c) $2019 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Temos a fatoração de 2019 como $3 * 673 \Rightarrow a + b = 2019$ e $a - b = 1$, ou $a + b = 673$ e $a - b = 3$. Logo $(a, b) = (1010, 1009)$ ou $(338, 335)$.

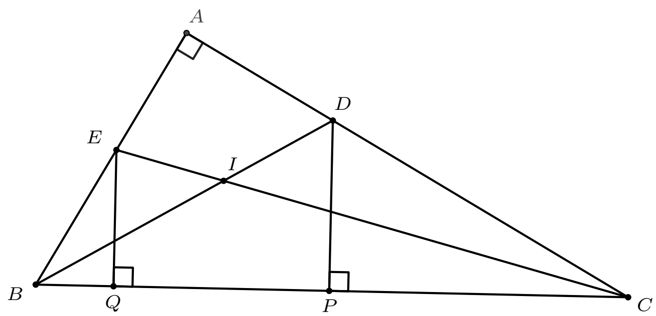
Critério de Correção Problema 1

a) (2 ptos) Vale 1 pto pela conjectura sem explicitar algum produto notável

b) (2 ptos) Vale 1 pto só pela conjectura sem prova

c) (2 ptos) Vale 1 pto por apresentar o produto notável da diferença de dois quadrados
Vale 1 pto por achar as soluções sem provar que são únicas
Pontos acima não cumulativos

Problema 2. (7 pontos) Seja ABC um triângulo retângulo com hipotenusa BC e incentro I. As bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ intersectam os lados AC e AB em D e E, respectivamente. Sejam P e Q os pés das perpendiculares dos pontos D e E ao lado BC. Prove que I é circuncentro de APQ.



Observações: lembre-se que o incentro de um triângulo é o encontro das suas bissetrizes internas e o circuncentro de um triângulo é o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo.

Solução 1: Temos que $\angle ACE = \angle QCE = \alpha$, já que CE é bissetriz do $\angle ACB$. Além disso, como os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle QCE$ são retângulos, então $\angle EAC = \angle EQC = 90^o$ e $\angle QEC = \angle AEC = 180^o - \angle EQC - \angle QCE = 180^o - \angle EAC - \angle ACE = 90^o - \alpha$. Portanto, como os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle QCE$ também possuem o lado CE em comum, eles são congruentes pelo caso ALA. Em particular, $AE = EQ$ e $QC = AC$. Pela congruência, também temos que $\angle CEQ = \angle CEA$, logo EC é bissetriz do ângulo $\angle AEQ$. Como $\triangle AEQ$ é isósceles, então EC também é mediatriz de AQ. Analogamente, BD é mediatriz de AP. Portanto, como I é a intersecção de BD e EC, I é o circuncentro do $\triangle APQ$, como queríamos.

Critérios da 1ª solução:

- **(3 pontos)** Provar a congruência $\triangle ACE \equiv \triangle QCE$ e/ou $\triangle BAD \equiv \triangle BPD$.
- **(1 ponto)** Provar que $AE = EQ$ e/ou $AD = DP$
- **(1 ponto)** Usar a congruência $\triangle ACE \equiv \triangle QCE$ para perceber que EC é bissetriz do $\angle AEQ$, portanto é mediatriz do lado AQ, ou análogo para BD e AP.
- **(1 ponto)** Concluir que, como I é a intersecção de BD e CE (mediatrizes de AQ e AP, respectivamente), I é o circuncentro do $\triangle APQ$.
- **(1 ponto)** Concluir o problema de forma satisfatória.

Observações:

- Caso a aluna apenas mencione a conguência $\triangle ABD \equiv \triangle PBD$ ou $\triangle CAE \equiv \triangle CQE$ sem nenhuma prova, ou seja, sem escrever o caso específico de congruência (nessa situação, caso ALA ou AA_oL) e sem especificar quais lados/ângulos dos triângulos são equivalentes, então a aluna ganhará somente *1* dos *3 pontos* que são dados pela demonstração completa da congruência. Dessa forma, a pontuação máxima possível da aluna no problema será *5 pontos*.
- Caso a aluna prove que $\triangle ABD \sim \triangle PBD$ ou $\triangle CAE \sim \triangle CQE$ sem mencionar que os triângulos são congruentes devido ao lado comum que compartilham, então a aluna ganhará somente *2* dos *3 pontos* que são dados pela demonstração completa da congruência. Dessa forma, a pontuação máxima possível da aluna no problema será *6 pontos*.

Solução 1 Alternativa: De $\angle EAC = \angle EQC = 90^o$, temos que $\angle EAC + \angle EQC = 180^o$, portanto $AEQC$ é um quadrilátero cíclico. Como $\angle ACE = \angle QCE$, já que CE é bissetriz de

$\angle ACB$, então $\angle ACE = \angle QCE = \angle EAQ = \angle EQA$, logo $\triangle AEQ$ é isósceles. Também temos que $\angle QAC = \angle EAC - \angle EAQ = 90^{o} - \angle EAQ = 90^{o} - \angle EQA = \angle AQC$, logo $\triangle QAC$ também é isósceles. Isso implica que, como $AEQC$ é cíclico, $\angle QAC = \angle AQC = \angle AEC = \angle QEC$, ou seja, CE é bissetriz do $\angle AEQ$. Como $\triangle AEQ$ é isósceles, CE também é mediatriz do lado AQ. Analogamente, temos que BD é mediatriz do lado AP. Assim, visto que I é a intersecção de BD e CE, percebemos que I é a interseção das mediatrizes de AP e AQ, ou seja, I é o circuncentro do $\triangle APQ$.

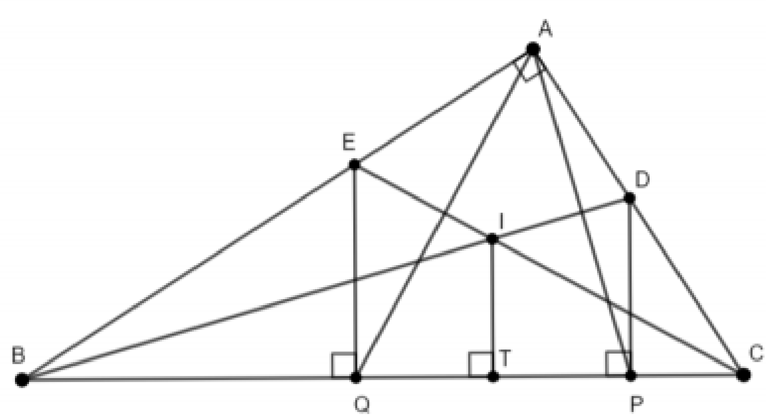
Critérios da 1ª solução alternativa:

- **(1 ponto)** Provar que $AEQC$ ou $ABPD$ é um quadrilátero cíclico.
- **(2 pontos)** Provar que $\triangle AEQ$ e/ou $\triangle ADP$ é isósceles (ou que $\triangle ACQ$ e/ou $\triangle ABP$ é isósceles).
- **(1 ponto)** Provar que EC é bissetriz de $\angle AEQ$, ou análogo para BD e $\angle ADP$.
- **(1 ponto)** Provar que, como EC é bissetriz de $\angle AEQ$, portanto é a mediatriz de AQ, ou análogo para BD e AP (ou provar que EC é bissetriz de $\angle ACB$ e portanto mediatriz de AQ, visto que $\triangle ACQ$ é isósceles, ou análogo para BD).
- **(1 ponto)** Provar que, por EC e BD serem as mediatrizes de AQ e AP, respectivamente, então I é o circuncentro do $\triangle APQ$.
- **(1 ponto)** Concluir o problema de maneira satisfatória.

Pontuação não cumulativa:

- **(1 ponto)** Somente conjecturar que EC é mediatriz de AQ, ou análogo (BD mediatriz de AP).
- **(2 pontos)** Conjecturar que EC e BD são mediatrizes de AQ e AP, respectivamente, e concluir que, por ser o encontro das mediatrizes, I é o circuncentro.
- **(2 pontos)** Citar, com argumentos fracos, que EC é mediatriz de AQ, ou análogo com BD e AP (usar o argumento de que $AEQC$ e/ou $ABPD$ é uma "pipa", por exemplo).
- **(3 pontos)** Citar, com argumentos fracos, que EC é mediatriz de AQ, ou análogo com BD e AP, e concluir que, por I ser o encontro das mediatrizes de AP e AQ, então I é o circuncentro.
- **(6 pontos)** Provar, de qualquer maneira satisfatória ,que EC e/ou BD são mediatrizes de AQ e/ou AP, respectivamente.
- **(7 pontos)** Provar, de qualquer maneira satisfatória, que EC e BD são mediatrizes de AQ e AP, respectivamente, e portanto que I é o encontro das mediatrizes. Concluindo assim que I é o circuncentro do $\triangle APQ$.

Solução 2:



Seja T o pé da perpendicular à BC passando por I. Seja também $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Perceba que, como $\angle EAC = \angle EQC = 90^o$, então $AEQC$ é um quadrilátero cíclico, logo, $\angle EAQ = \angle ECQ = \frac{\angle ACB}{2}$. Analogamente, $ABPD$ é cíclico, logo $\angle PAD = \angle PBD = \frac{\angle ABC}{2}$. Dessa forma, temos que $\angle PAQ = \angle BAC - \frac{\angle ACB}{2} - \frac{\angle ABC}{2} = \angle BAC - \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} = 90^o - 45^o = 45^o$.

Logo, para I ser o circuncentro, basta provar que I está na mediatriz de PQ (T é o ponto médio de PQ) e que $\angle PIQ = 2\angle PAQ = 90^o$. Em triângulos retângulos, a mediana tem metade da medida da hipotenusa, e isso é uma propriedade única de triângulos retângulos, logo basta provar que $IT = \frac{PQ}{2} = TQ = TP$, para concluir que I é o circuncentro do $\triangle APQ$.

Note que $IT =$ inraio do $\triangle ABC$. Sejam T_1 e T_2 os pontos de tangência do incírculo com os lados AB e AC. Observe que IT_1AT_2 é um retângulo (devido aos 3 ângulos retos diretamente obtidos), e também um quadrado visto que $IT_1 = IT_2$, $IT_1 = AT_2$ e $IT_2 = AT_1$. Assim, sendo p o semi-perímetro do $\triangle ABC$, percebemos que $IT = IT_1 = IT_2 = AT_1 = AT_2 = p - a$. Logo, basta provar que $TP = TQ = p - a$.

Perceba que $BT = p - b = \frac{a+c-b}{2}$ e $CT = p - c = \frac{a+b-c}{2}$. Pelo Teorema da Bissetriz Interna, podemos perceber que $CD = \frac{ab}{a+c}$ e $BE = \frac{ac}{a+b}$. Agora, como $\triangle CPD \sim \triangle CAB$ pelo caso AA de semelhança ($\angle PCD = \angle ACD$, $\angle CPD = \angle CAB = 90^o$), obtemos $\frac{CD}{CP} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow \frac{\frac{ab}{a+c}}{CP} = \frac{a}{b} \Rightarrow CP = \frac{b^2}{a+c}$. Note que $BP = a - CP = a - \frac{b^2}{a+c} = \frac{a^2+ac-b^2}{a+c} = \frac{c^2+ac}{a+c} = \frac{c(a+c)}{a+c} = c$, pelo Teorema de Pitágoras ($a^2 - b^2 = c^2$). Desse modo, $CP = a - BP = a - c$. Analogamente $BQ = a - b$. Com isso,

$$QT = BT - BQ = \frac{a+c-b}{2} - (a-b) = \frac{a+c-b-2a+2b}{2} = \frac{b+c-a}{2} = p - a$$

Analogamente, $TP = CT - CP = \frac{a+b-c}{2} - (a-c) = \frac{b+c-a}{2} = p - a = QT$, ou seja, $IT = TP = TQ = p - a$, concluindo assim o problema.

Critérios da 2ª solução:

- **(1 ponto)** Encontrar o valor de TP ou TQ, em função dos lados do triângulo $\triangle ABC$.
- **(1 ponto)** Provar que $TP = TQ$.
- **(3 pontos)** Provar que $IT = TP = TQ$
- **(2 pontos)** Concluir de maneira satisfatória que I é o circuncentro.

Pontuação não cumulativa:

- **(1 ponto)** Mostrar que $\angle QAP = 45^o$.
- **(2 pontos)** Provar que $IP = IQ$ de maneira satisfatória.

Solução 3: Temos que $\angle ACE = \angle QCE = \alpha$, já que CE é bissetriz do $\angle ACB$. Além disso, como os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle QCE$ são retângulos, então $\angle EAC = \angle EQC = 90^o$ e $\angle QEC = \angle AEC = 180^o - \angle EQC - \angle QCE = 180^o - \angle EAC - \angle ACE = 90^o - \alpha$. Logo, como os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle QCE$ também possuem o lado CE em comum, eles são congruentes pelo caso ALA de congruência. Logo $AC = CQ$. Dessa forma percebemos que $\triangle ACI \equiv \triangle QCI$, pelo caso LAL de congruência ($AC = CQ$; $\angle ACE = \angle ACI = \angle QCE = \angle QCI = \alpha$; CI é lado comum), logo $AI = IQ$. Analogamente, perceberemos que $\triangle ABD \equiv \triangle PBD$ e $\triangle ABI \equiv \triangle PBI$, ou seja, $AI = IP$. Concluindo que $AI = IP = IQ$ e I está na mediatriz dos três lados do $\triangle APQ$, portanto I é o circuncentro do $\triangle APQ$.

Solução 3 Alternativa: Temos que $\angle ACE = \angle QCE = \alpha$, já que CE é bissetriz do $\angle ACB$. Além disso, como os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle QCE$ são retângulos, então $\angle EAC = \angle EQC = 90^o$ e $\angle QEC = \angle AEC = 180^o - \angle EQC - \angle QCE = 180^o - \angle EAC - \angle ACE = 90^o - \alpha$. Logo, como os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle QCE$ também possuem o lado CE em comum, eles são congruentes pelo caso ALA de congruência. Logo $AE = EQ$. Dessa forma percebemos que $\triangle AEI \equiv \triangle QEI$, pelo caso LAL de congruência ($AE = EQ$; $\angle AEC = \angle AEI = \angle QEC = \angle QEI = 90^o - \alpha$; EI é lado comum), logo $AI = IQ$. Analogamente, perceberemos que $\triangle ABD \equiv \triangle PBD$ e $\triangle ADI \equiv \triangle PDI$, ou seja, $AI = IP$.

Concluindo que $AI = IP = IQ$, portanto I está na mediatriz dos três lados do $\triangle APQ$, portanto I é o circuncentro do $\triangle APQ$.

Critérios da 3ª solução e da 3ª solução alternativa:

- **(3 pontos)** Provar a congruência $\triangle ACE \equiv \triangle QCE$ e/ou a congruência $\triangle ABD \equiv \triangle PBD$.
- **(1 ponto)** Encontrar congruência que implicará $AI = IQ$ ou $AI = IP$, como $\triangle ACI \equiv \triangle QCI$ $/\triangle ABI \equiv \triangle PBI$ ou $\triangle AEI \equiv \triangle QEI$ / $\triangle ADI \equiv \triangle PDI$.
- **(1 ponto)** Provar que $AI = IQ$ ou $AI = IP$.
- **(1 ponto)** Concluir que, por $AI = IQ = IP$, então I estará nas mediatrizes dos três lados do triângulo e, portanto, I é circuncentro do $\triangle APQ$.
- **(1 ponto)** Concluir o problema de maneira satisfatória.

Observação:

- Soluções que apresentem pequenos erros de argumentação, mas passam por todos os passos necessários da resolução, receberão *5* dos 7 pontos do problema. Dentro desse caso, entram, por exemplo, soluções que contém uma congruência não provada (sem justificativa suficiente do porquê os triângulos são congruentes).
- Soluções que se baseiam na figura do problema, ou seja, onde BE e CD são as bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente, serão consideradas da mesma maneira que soluções baseadas no enunciado, onde BD e CE são as bissetrizes.

Problema 3. (8 pontos) Dizemos que um inteiro positivo N é agradável se ele satisfaz às seguintes condições:

- Todos os seus algarismos são 1 ou 2;
- Todos os números formados por 3 algarismos consecutivos de N são distintos.

Por exemplo, 121222 é agradável, pois os 4 números formados por 3 algarismos consecutivos de 121222, que são 121,212,122 e 222, são distintos. Porém, 12121 não é agradável. Qual a maior quantidade possível de algarismos que um número agradável pode ter? Qual o maior número agradável que existe?

Solução: Observe que se um número agradável tivesse 11 algarismos ou mais, então seria possível formar 9 ou mais números com três algarismos consecutivos. Daí, pelo princípio das casas dos pombos, existiriam dois desses números iguais, já que há $2^3 = 8$ números de 3 algarismos formados por 1 e 2. Assim, todo número agradável tem no máximo 10 algarismos. Um exemplo com exatamente 10 algarismos é 2221211122

(a) O maior número claramente deve ter 10 dígitos. Intuitivamente, devemos maximizar os dígitos a partir da esquerda, sempre escolhendo o dígito 2 quando possível. Isso será formalizado nos próximos passos.

(b) Se houver um número de 10 dígitos começando com 222, então o maior possível será dessa forma. Assim, tentamos construir tal número. Começando com 222, o 4o algarismo não pode ser 2 pois repetiria 222, mas o quinto pode, logo o número deve ser da forma 22212abcde (isto é, se tal número existir, será o máximo).

(c) A partir daqui, a sequência "22" só pode ocorrer no fim do número (= "de") pois "222" e "221" já apareceram. Logo temos que ter a=1

(d) Temos 222121bcde. Como "212" já apareceu, b=1. O número teria que ser da forma 2221211cde.

(e) Se c fosse 2, como não podemos ter 22 antes do fim do número, teríamos que ter d=1 e bcd = 121 repetiria. Logo, c=1 e temos 22212111de. Agora podemos colocar 22, maximizando e chegando a 10 dígitos. O maior número é 2221211122.

Critério de Correção Problema 3

Qualquer solução completa e correta receberá pontuação integral. Parciais:

(1) (2 pontos) Observar que há $2^3 = 8$ números distintos de 3 algarismos no conjunto $\{1, 2\}$ e que portanto o número pode ter no máximo 10 dígitos (pois com 11 dígitos se formariam 9 números). Perceba que isso implica que o máximo é menor ou igual a 10 (10 poderia não ser atingível)
Observações:
(a) apenas observar que há 8 números - 1 ponto
(b) argumentar corretamente que há no máximo 10 dígitos de outras maneiras - recebe os 2 pontos integrais

(2) (2 pontos) Exibir um número com 10 dígitos que dá certo, provando que o máximo de fato é 10, pois é atingível.

(3) (2 pontos) Exibir o número máximo (2221211122) sem prova

(4) (2 pontos) Argumentar corretamente que 2221211122 é o máximo

Exemplo de argumento:
(a) O maior número claramente deve ter 10 dígitos. Intuitivamente, devemos maximizar os dígitos a partir da esquerda, sempre escolhendo o dígito 2 quando possível. Isso será formalizado nos próximos passos.

(b) Se houver um número de 10 dígitos começando com 222, então o maior possível será dessa forma. Assim, tentamos construir tal número. Começando com 222, o 4o algarismo não pode ser 2 pois repetiria 222, mas o quinto pode, logo o número deve ser da forma 22212abcde (isto é, se tal número existir, será o máximo).

(c) A partir daqui, a sequência “22” só pode ocorrer no fim do número (= “de”) pois “222” e “221” já apareceram. Logo temos que ter a=1

(d) Temos 222121bcde. Como “212” já apareceu, b=1. O número teria que ser da forma 2221211cde.

(e) Se c fosse 2, como não podemos ter 22 antes do fim do número, teríamos que ter d=1 e bcd = 121 repetiria. Logo, c=1 e temos 22212111de. Agora podemos colocar 22, maximizando e chegando a 10 dígitos. O maior número é 2221211122.

Argumentos com pequenos erros podem receber descontos de 1 ponto.

Problema 4. (9 pontos) Um inteiro positivo n é chamado *bonitinho* quando existe um inteiro positivo m tal que que $m!$ termina em exatamente n zeros.

a) Determine se 2019 é bonitinho.

b) Quantos inteiros positivos menores que 2019 são bonitinhos?

Solução

a) Para descobrir o número de zeros de $m!$ podemos contar o número de fatores 5, pois cada zero conta um fator 2 e um fator 5 que formaram um fator 10 e há mais fatores 2 do que fatores 5. Basta somar os pisos de $m/5k$, pois isso conta os múltiplos $5k$ de 1 até m e cada múltiplo de $5k$ é contado k vezes em $m/5t$ para cada $t = 1, 2, \ldots, k$. Veja que

$$\left\lfloor \frac{8090}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^5} \right\rfloor = 1618 + 323 + 64 + 12 + 2 = 2019 \tag{1}$$

Para chegar nesse valor podemos aproximar cada piso pela fração que daria $\frac{781m}{3125} = 2019 \Leftrightarrow m = 8078$ aproximadamente.

a) Observe que de 1 até 2018 temos que cada número bonitinho aparece 5 vezes, pois a quantidade de zeros só se altera nos múltiplos de 5. Então podemos calcular por $(8089 - 4)/5 = 1617$. Outra forma é notar que a cada múltiplo de 25 pulamos 1 número, a cada múltiplo de 125 pulamos dois números e assim por diante. Assim, a quantidade de números pulados é

$$\left\lfloor \frac{8090}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8090}{5^5} \right\rfloor = 401$$

Logo, de 1 até 2018 existem $2018 - 401 = 1617$ números bonitinhos.

Critério de Correção Problema 4

a) (6 pontos)

(+1 pt) Observar que, para descobrir a quantidade de zeros em $m!$, é necessário contar apenas o número de fatores 5.

(+1 pt) Enunciar corretamente a fórmula de De Polignac.

(+1 pt) Argumentar corretamente que a maior potência de 5 a ser considerada na fórmula é 5^5.

(+2 pt) Encontrar o limitante superior para m.

(+1 pt) Aplicar corretamente a fórmula de De Polignac para o limitante encontrado, conseguindo (1).

b) (3 pontos)

(+1 pt) Observar que a cada múltiplo de 25 pulamos 1 número bonitinho, a cada múltiplo de 125 pulamos 2, e assim sucessivamente.

(+1 pt) Calcular corretamente a quantidade de números entre 1 e 2018 que não são bonitinhos, obtendo 401.

(+1 pt) Concluir que temos 1617 números bonitinhos nesse intervalo.

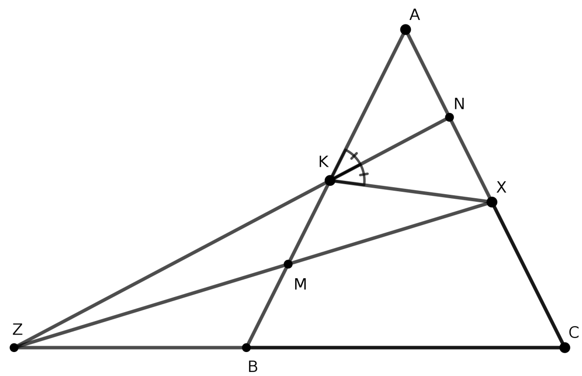
Solução alternativa:

(+2 pt) Observar que cada número bonitinho aparece 5 vezes, entre múltiplos de 5, a menos do intervalo de 1 a 4.

(+1 pt) Concluir, por $(8089 - 4)/5$, que temos 1617 números bonitinhos de 1 a 2018.

Problema 5. (10 pontos) Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$. Sejam X e K pontos sobre AC e AB, respectivamente, tais que $KX = CX$. A bissetriz de $\angle AKX$ intersecta a reta BC em Z. Mostre que XZ passa pelo ponto médio de BK.

Solução:



Como o triângulo ABC é isósceles, consideremos $B\widehat{A}C = 2\beta$, dai

(2) $$A\widehat{B}C = B\widehat{C}A = 90 - \beta.$$

Sejam $A\widehat{K}X = 2\alpha$, como a reta ZK é bissetriz do ângulo $A\widehat{K}X$, segue que $Z\widehat{K}B = A\widehat{K}N = \alpha$.

Considerando os triângulos ZMB, ZXC e ZKX, sejam h_1, h_2 e h_3 suas alturas, respectivamente. Dai,

$$[ZBM] = \frac{ABh_1}{2},$$

$$[ZCX] = \frac{ACh_2}{2}$$

e

$$[ZKX] = \frac{KXh_3}{2},$$

onde [...] denota a área do triângulo. Além disso, como h_1 também é a altura do triângulo ZMK, temos

$$[ZMK] = \frac{KMh_1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{[ZBM]}{[ZCX]} = \frac{BMh_1}{CXh_2}$$

e

$$\frac{[ZKX]}{[ZMK]} = \frac{KXh_3}{KMh_1}$$

Como por hipótese $KX = CX$, temos

(3) $$\frac{[ZBM]}{[ZCX]} . \frac{[ZKX]}{[ZMK]} = \frac{BMh_3}{KMh_2}$$

Por outro lado,

$$[ZBM] = ZM.ZB.\sin(B\widehat{Z}M,$$
$$[ZCX] = ZX.ZC.\sin(C\widehat{Z}X = ZX.ZC.\sin(B\widehat{Z}M,$$
$$[ZKX] = ZX.ZK.\sin(X\widehat{Z}K$$

e

$$[ZMK] = ZM.ZK.\sin(M\widehat{Z}K = ZM.Zk.\sin(X\widehat{Z}K$$

Dai,

$$\frac{[ZBM]}{[ZCX]}.\frac{[ZKX]}{[ZMK]} = \frac{ZB}{ZC} \tag{4}$$

Comparando 3 e 4, temos

$$\frac{BM}{KM} = \frac{ZB}{ZC}\frac{h_2}{h_3}. \tag{5}$$

Observa-se que $h_3 = KZ\sin\alpha$ e $h_2 = CZ\cos\beta$. Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo BKZ e usando 2, segue que

$$\frac{KZ}{BZ} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Ou seja,

$$\frac{BM}{KM} = \frac{ZB}{ZC}\frac{CZ\cos\beta}{KZ\sin\alpha} = 1$$

Portanto, $BM = KM$.

Critério de Correção Problema 5

Qualquer solução completa e correta receberá pontuação integral.

Parciais:

- 1 ponto - Determinar a relação entre os ângulos do triângulo isósceles e os ângulos formados pela bissetriz de $A\widehat{K}X$
- 2 pontos - Considerar as distâncias do ponto Z as retas AB, AC e KX, determinar as áreas dos 4 triângulos e encontrar a relação 3
- 1 ponto - Determinar as áreas dos 4 triângulos, usando a relação com o seno dos ângulos e e encontrar a relação 4
- 1 ponto - Concluir que $\frac{BM}{KM} = \frac{ZB}{ZC}\frac{h_2}{h_3}$
- 2 pontos - Concluir que $h_3 = KZ\sin\alpha$ e $h_2 = CZ\cos\beta$
- 2 pontos - Aplicar a lei dos senos ao triângulo BKZ
- 1 ponto - Concluir que $BM = KM$

Pontos não cumulativos com os acima:

Sendo $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$ e $\angle AXZ = 2\theta$.

- 3 pontos - Determinar as seguintes relações entre ângulos: $\angle BAC = 180 - 2\alpha$; $\angle AKX = 2(\alpha - \theta)$; $\angle ZKB = \alpha - \theta$; $\angle XKC = \angle KCX = \theta$.