

X European Girls' Mathematical Olympiad
Primeiro Teste de Seleção
06 de fevereiro de 2021

INSTRUÇÕES:

- Escreva seu nome e sobrenome em cada folha que usar. Eles são essenciais para sua identificação.
- Escreva somente em um dos lados de cada folha.
- Não resolva mais de uma questão por folha e indique qual problema está sendo resolvido. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos. Após esse período, as alunas terão 30 minutos para escanear e enviar as provas, mas não será mais permitido escrever nada.
- Após o término, escaneie sua prova colocando as soluções **em ordem** (problema 1, depois 2, etc, e por fim o rascunho) e envia-as como um PDF único para o Dropbox.
- O PDF deve ser nomeado como “Nome_Sobrenome_TesteEGMO”.

► **PROBLEMA 1**

Seja X_0, X_1, \dots uma sequência de reais que satisfaz as seguintes condições

(i) $X_{2k} = (4X_{2k-1} - X_{2k-2})^2$, para k inteiro positivo

(ii) $X_{2k+1} = \left| \frac{X_{2k}}{4} - k^2 \right|$, para k inteiro não negativo

e com $X_0 = 1$.

(a) Encontre o valor de X_{2022} .

(b) Mostre que existem infinitos números ímpares nessa sequência que são múltiplos de 2021.

► **PROBLEMA 2**

Sejam a, b , e k inteiros positivos tais que

$$mdc(a, b)^2 + mmc(a, b)^2 + a^2b^2 = 2020^k.$$

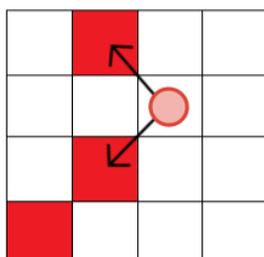
Prove que k é par.

► **PROBLEMA 3**

Um triângulo acutângulo ABC com $AC > AB$ está inscrito na circunferência Ω . Seja P o ponto médio do arco menor BC de Ω , e Q o ponto médio do arco maior BC de Ω . Seja M a projeção de Q sobre AC . Prove que o circuncírculo do triângulo AMB passa pelo ponto médio do segmento AP .

► **PROBLEMA 4**

Beth resolveu inventar uma nova peça de xadrez, a *duquesa*. A *duquesa* ataca todas as casas de duas das quatro diagonais na qual está (as direções que ela ataca podem variar para *duquesas* diferentes). Curiosa, ela resolveu perguntar qual é o maior número n possível de *duquesas* que podem ser colocadas simultaneamente em um tabuleiro de xadrez 8×8 tal que nenhuma *duquesa* ataque outra. Encontre o valor de n .



*Este é um exemplo de uma duquesa em um tabuleiro 4×4 .
As casas atacadas estão marcadas em vermelho.*