X European Girls' Mathematical Olympiad
Primeiro Teste de Seleção - Soluções
06 de fevereiro de 2021

▸ **PROBLEMA 1**
Seja $X_0, X_1, \ldots$ uma sequência de reais que satisfaz as seguintes condições
(i) $X_{2k} = (4X_{2k-1} - X_{2k-2})^2$, para k inteiro positivo
(ii) $X_{2k+1} = |\frac{X_{2k}}{4} - k^2|$, para k inteiro não negativo
e com $X_0 = 1$.
(a) Encontre o valor de X_{2022}.
(b) Mostre que existem infinitos números ímpares nessa sequência que são múltiplos de 2021.

*Solução: Conjectura: Para **n** inteiro não nulo, $X_{2n} = (2n-2)^4$.*

Prova por indução:
I) Casos iniciais:

- $X_2 = 0 = (2-2)^4$, pois $X_0 = 1$ e $X_1 = |\frac{1}{4} - 0^2| = \frac{1}{4}$, então $X_2 = (4 \cdot \frac{1}{4} - 1)^2 = 0$
- $X_4 = 16 = (4-2)^4$, pois $X_2 = 0$ e $X_3 = |\frac{0}{4} - 1^2| = 1$, então $X_4 = (4.1 - 0)^2 = 16$.

II) Hipótese de Indução:
Suponha que para todo m com $0 \leq m \leq M$, $X_{2m} = (2m-2)^4$.

III) Passo indutivo:
Vamos provar que $X_{2(M+1)} = [2(M+1) - 2]^4 = (2M)^4$.
Temos que $X_{2(M+1)} = |\frac{X_{2M}}{4} - M^2|$, como sabemos $X_{2M} = (2M-2)^4$, obtemos que $X_{2(M+1)} = |\frac{(2M-2)^4}{4} - M^2|$.
Sabemos que para $M \geq 2$, $\frac{(2M-2)^4}{4} - M^2 \geq 0$, já que:

$$\frac{(2M-2)^4}{4} - M^2 \geq 0$$
$$M^2 - \frac{5}{2}M + 2 \geq 0$$

e essa função é convexa com raízes 2 e $\frac{1}{2}$. Assim, não precisamos mais do módulo: $X_{2n+1} = \frac{(2n-2)^4}{4} - n^2$ para $n \geq 2$.

Substituindo X_{2M} e X_{2M+1} em X_{2M+2}, temos que:

$$X_{2(M+1)} = \{4.[\frac{(2M-2)^4}{4} - M^2] - (2M-2)^4\}^2$$
$$X_{2(M+1)} = \{(2M-2)^4 - 4M^2 - (2M-2)^4\}^2$$
$$X_{2(M+1)} = \{-4M^2\}^2$$
$$X_{2(M+1)} = (2M)^4$$

Ou seja, $X_{2(M+1)} = (2M+2-2)^4$, concluindo assim nosso passo indutivo.

(a) $X_{2022} = 2020^4$.
(b) Para $n \geq 2$,

$$X_{2n+1} = \frac{(2n-2)^4}{4} - n^2$$
$$X_{2n+1} = \frac{(4n^2-8n+4)^2}{4} - n^2$$
$$X_{2n+1} = (2n^2 - 4n + 2)^2 - n^2 X_{2n+1}$$
$$X_{2n+1} = (2n^2 - 5n + 2)(2n^2 - 3n + 2)$$
$$X_{2n+1} = (2n-1)(n-2)(2n^2 - 3n + 2)$$

Ou seja, com n = 2021t + 2, $2021|X_{2t+1}$ para todo t inteiro positivo, pois o fator (n-2) será múltiplo de 2021. Como o item (b) pede que X_{2t+1} seja ímpar, só precisamos fazer t inteiro positivo ímpar.

$\square$

▸ **PROBLEMA 2**

Sejam a, b, e k inteiros positivos tais que

$$mdc(a,b)^2 + mmc(a,b)^2 + a^2b^2 = 2020^k.$$

Prove que k é par.

Solução: Sabemos que vale a seguinte relação:

$$mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = ab.$$

Logo, a equação equivale a:

$$mdc(a,b)^2 + mmc(a,b)^2 + (mdc(a.b) \cdot mmc(a,b))^2 = 2020^k$$

Somando um dos dois lados, podemos fatorar utilizando a fatoração $1 + x + y + xy = (1 + x)(1 + y)$.
Ficamos então com:

$$mdc(a,b)^2 + mmc(a,b)^2 + (mdc(a,b) \cdot mmc(a,b))^2 + 1 = 2020^k + 1$$
$$(1 + mdc(a,b)^2)(1 + mmc(a,b)^2) = 2020^k + 1$$

Agora veja que se k é ímpar, então $2021 = 43 \cdot 47$ divide $(2020^k + 1)$. Mas então 43 divide $mdc(a,b)^2 + 1$ ou $mmc(a,b)^2 + 1$, que são números da forma $t^2 + 1$. Mas sabemos o seguinte lema:

Lema: Seja p um número primo. Então, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $p | x^2 + 1$ se, e somente se, $p \equiv 1 \pmod 4$.
Mas 43 deixa resto 3 módulo 4, absurdo! Portanto, não existe solução para k ímpar.

$\square$

▸ **PROBLEMA 3**

Um triângulo acutângulo ABC com $AC > AB$ está inscrito na circunferência Ω. Seja P o ponto médio do arco menor BC de Ω, e Q o ponto médio do arco maior BC de Ω. Seja M a projeção de Q para AC. Prove que o circuncírculo do triângulo AMB passa pelo ponto médio do segmento AP.

Solução 1: Seja T o segundo ponto de interseção de AP com (AMB) e $2\alpha = \angle A$. Nosso objetivo é provar que $AP = 2 \cdot TP$.

Como PT e MC concorrem em A, e $B \in (AMT), B \in (ACP)$, B é o centro da roto-homotetia que leva MT em CP. Pela semelhança automática desta roto-homotetia, $\triangle BTP \cong \triangle BMC$.

Com isso, podemos obter a relação

$$\frac{TP}{BP} = \frac{MC}{BC} \implies TP = \frac{BP \cdot MC}{BC}.$$

Como o triângulo QMC é retângulo, sendo $\gamma = \angle ACQ = \angle APQ$, temos que

$$MC = QC \cdot \sin(90 - \gamma) \implies TP = \frac{BP \cdot QC \cdot \sin(90-\gamma)}{BC}.$$

Pela lei dos senos extendida, $QC = 2R\sin(90-\alpha), BP = 2R\sin\alpha$ e $BC = 2R\sin 2\alpha$, logo

$$TP = 2R \cdot \frac{\sin(90-\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\sin(90-\gamma)}{\sin 2\alpha} = 2R \cdot \frac{\sin(90-\gamma)}{2} = \frac{AP}{2}.$$

Onde a última igualdade vale pela lei dos senos estendida no triângulo AQP. Portanto, provamos que $AP = 2 \cdot TP$, concluindo a prova.

□

Solução 2: Seja T o segundo ponto de interseção de AP com (AMB). Seja O o centro da circunferência (ABC). Nosso objetivo é provar que T é ponto médio de AP.

Primeiramente vamos provar que os triângulos $\triangle BTP$ e $\triangle BMC$. são semelhantes **(1)**. O ângulo $\angle BCM = \angle BPA$ (por Ω) $= \angle BPT$. Além disso, como $AMTB$ é cíclico $\implies \angle BTP = 180° - \angle BTA = 180° - \angle BMA = \angle BMC$. Portanto, com as igualdades ($\angle BCM = \angle BPT$) e ($\angle BTP = \angle BMC$), temos que os triângulos são de fato semelhantes (Caso Ângulo-Ângulo).

Agora provaremos que os triângulos $\triangle BPO$ e $\triangle BCQ$. são semelhantes **(2)**. O ângulo $\angle BPO$ é o mesmo que $\angle BPQ = \angle BCQ$ (por Ω). Além disso, o ângulo central $\angle BOP = \angle BAC = \angle BQC$ (por Ω). Portanto, com as igualdades ($\angle BPO = \angle BCQ$) e ($\angle BOP = \angle BQC$), temos que os triângulos são de fato semelhantes (Caso Ângulo-Ângulo).

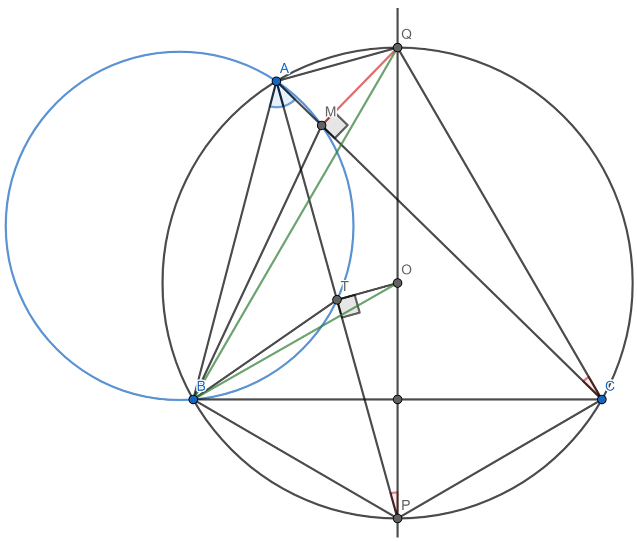
Das semelhanças **(1)** e **(2)**, temos as seguintes relações:

$$\frac{PT}{MC} = \frac{BP}{BC} = \frac{PO}{QC} \ \textbf{(3)}$$

Por Ω, temos que $\angle APQ = \angle ACQ$, que é equivalente a $\angle TPO = \angle MCQ$ **(4)**.

De **(3)** e **(4)** concluímos que os triângulos $\triangle TPO$ e $\triangle MCQ$. são semelhantes $\implies \angle OTP = \angle QMC = 90°$. Como OA = OP ($\triangle AOP$ isósceles) e $\angle OTP = 90° \implies$ TA = TP e T é ponto médio de AP.

□



Solução 03: Seja N o ponto médio de AP. Provaremos que $AMNB$ é cíclico, o que claramente implica o desejado.
Para isso, sejam 2α e 2γ os ângulos A e C do triângulo, e sejam $\angle NMA = \varphi$ e $\angle NBA = \theta$. Provaremos que $\varphi + \theta = 180$.
No $\triangle BPA$, temos $\angle PAB = \alpha$ e $\angle APB = 2\gamma$. Usando a lei dos senos nos triângulos $\triangle ANB$ e $\triangle PNB$ e o fato de que $AN = NP$, temos

$$\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{AN}{BN} = \frac{PN}{BN} = \frac{\sin(2\gamma+\alpha+\theta)}{\sin 2\gamma}$$

Usando o truque da cotangente para isolar θ, temos:

$$\cot\theta = \frac{\frac{\sin 2\gamma}{\sin\alpha} - \cos(2\gamma+\alpha)}{\sin(2\gamma+\alpha)}$$

Agora, para calcular $\cot\varphi$: no $\triangle AMN$, temos $\angle MAN = \alpha$, logo

$$\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi} = \frac{AM}{AN}(*)$$

.
Mas AN e AM são calculáveis. Supondo que o circunraio da circunferência é $\frac{1}{2}$, temos:
$AN = \frac{AP}{2} = \frac{\sin(2\gamma+\alpha)}{2}$
Pois o ângulo que olha para AP na circunferência é $\angle ACP$, que é $2\gamma + \alpha$.
Para calcular AM, usamos o triângulo retângulo AMQ. $\angle QAM = 90 - \angle MAP = 90 - \alpha$, pois $\angle QAP = 90$ (pois QP é diâmetro). Logo,
$AM = AQ\sin\alpha$
O ângulo que olha para AQ é $\angle QPA$, que é facilmente calculável pois Q é ponto médio do arco. Esse ângulo é $90 - 2\gamma - \alpha$, logo $AQ = \sin(90 - 2\gamma - \alpha) = \cos(2\gamma+\alpha)$ e $AM = \cos(2\gamma+\alpha)\sin\alpha$
Voltando para (*),

$$\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi} = \frac{2\cos(2\gamma+\alpha)\sin\alpha}{\sin(2\gamma+\alpha)} = 2\cot(2\gamma+\alpha)\sin\alpha$$

.
Usando o truque da cotangente novamente,

$$\cot\varphi = 2\cot(2\gamma+\alpha) - \cot\alpha$$

.
Queremos provar que $\cot\varphi = -\cot\theta$, ou

$$-2\cot(2\gamma+\alpha) + \cot\alpha = \frac{\frac{\sin 2\gamma}{\sin\alpha} - \cos(2\gamma+\alpha)}{\sin(2\gamma+\alpha)}$$

Aqui podemos fazer $2\gamma = \delta$ (o fator 2 não é relevante). Abrindo tudo, vê-se que isso é equivalente a

$$\sin\delta = \sin(\delta+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\delta+\alpha)$$

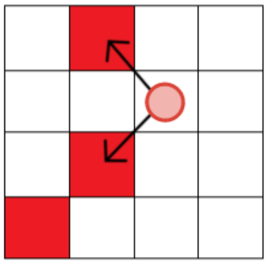
O que é verdade pois $\delta = (\delta+\alpha) - \alpha$

Estude o truque da cotangente em: https://cyshine.webs.com/Geoconta.pdf

□

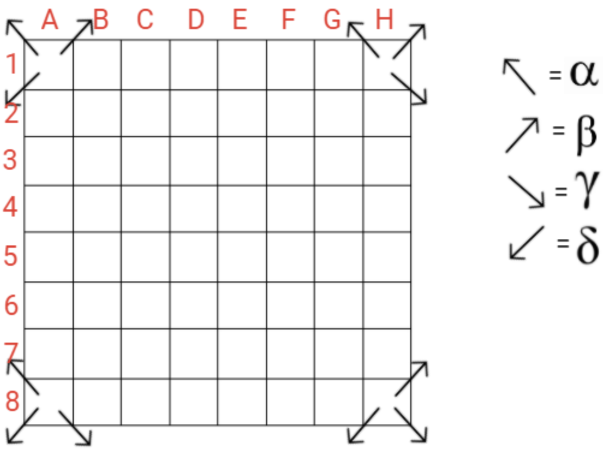
▸ **PROBLEMA 4**

Beth resolveu inventar uma nova peça de xadrez, a *duquesa*. A *duquesa* ataca todas as casas de duas das quatro diagonais na qual está (as direções que ela ataca podem variar para *duquesas* diferentes). Curiosa, ela resolveu perguntar qual é o maior número n possível de *duquesas* que podem ser colocadas simultaneamente em um tabuleiro de xadrez 8×8 tal que nenhuma *duquesa* ataque outra. Encontre o valor de n.



Este é um exemplo de uma duquesa em um tabuleiro 4×4.
As casas atacadas estão marcadas em vermelho.

Solução: Seja n o número de duquesas. Vamos contar a quantidade de direções em um tabuleiro 8x8. Há 30 diagonais, e como para cada diagonal, há 2 direções, o total de direções é 60. Entretanto, não há como todas as 60 direções serem *consumidas* num mesmo exemplo. Marcando três das quatro diagonais nas casas dos cantos (da maneira abaixo), podemos provar que no máximo duas das três diagonais representadas em cada quina poderão ser *consumidas*.



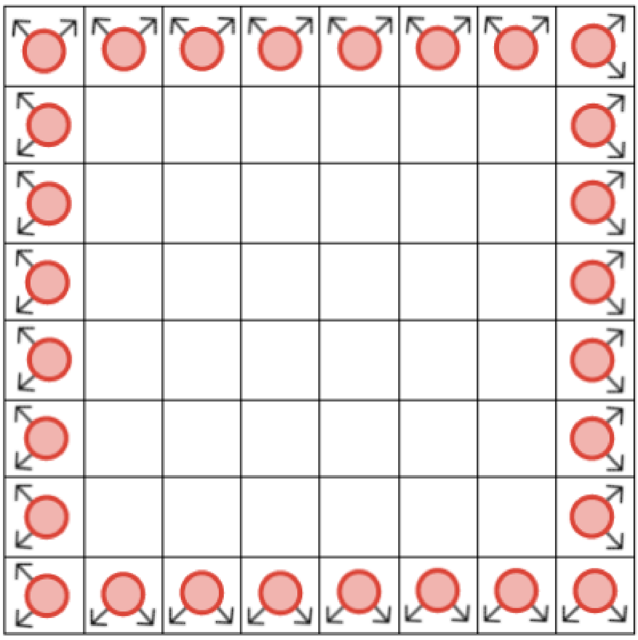
Analisando a casa A1, vamos supor que é possível usar as três diagonais indicadas. A única forma de as diagonais δ e β serem consumidas é se existe uma **duquesa X** em A1 que ataca essas duas direções. Entretanto, desse modo a direção α de A1 não será usada, ou teríamos que essa **duquesa Y** atacaria a **duquesa X**. Absurdo!

A prova é análoga para as outras quinas, assim retirando pelo menos 4 direções da cota inicial. Portanto, no máximo 56 das 60 direções podem ser atacadas em uma mesma disposição de *duquesas*.

Ao colocar uma **duquesa A** em uma posição qualquer, não podemos posicionar outra **duquesa B** em uma das 2 direções que a **duquesa A** ataca. Desta forma, podemos dizer que cada duquesa *consome* 2 direções, e com isso concluir que:

$$2 \cdot n \leq 56 \implies n \leq 28.$$

Temos um exemplo com 28 duquesas abaixo, logo $n = 28$



□