X European Girls' Mathematical Olympiad
Segundo Teste de Seleção
20 de fevereiro de 2021

INSTRUÇÕES:

- Escreva seu nome e sobrenome em cada folha que usar. Eles são essenciais para sua identificação.
- Escreva somente em um dos lados de cada folha.
- Não resolva mais de uma questão por folha e indique qual problema está sendo resolvido. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos. Após esse período, as alunas terão 30 minutos para escanear e enviar as provas, mas não será mais permitido escrever nada.
- Após o término, escaneie sua prova colocando as soluções **em ordem** (problema 1, depois 2, etc, e por fim o rascunho) e envia-as como um PDF único para o Dropbox.
- O PDF deve ser nomeado como "Nome_Sobrenome_TesteEGMO".

▸ **PROBLEMA 1**
Letícia adora brincar com conjuntos. Em determinado dia, ela decidiu criar um conjunto L tal que para todo n inteiro positivo, exatamente um elemento entre n, $2n$ e $3n$ estivesse em L. Se 2 pertence a L, prove que 13824 não está em L.

▸ **PROBLEMA 2**
Defina uma figura geométrica plana de n lados de vértices A_1,A_2,$A_3, ..., A_n$ (com A_i adjacente a A_{i+1} para todo i inteiro tal que $1 \leq i < n$ e com A_n adjacente a A_1) como arretada quando:
(i) O segmento A_jA_{j+1} tem medida igual a $(\sqrt{2})^{j-1}$, para todo $1 \leq j < n$, formando assim uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.
(ii) Os ângulos $\sphericalangle A_kA_{k+1}A_{k+2} = 135^{o}$, para todo k inteiro tal que $1 \leq k \leq n-2$.
Observação: A figura formada pode não ser convexa e seus lados podem se cruzar.
Observação 2: Os ângulos citados são medidos no sentido anti-horário.
(a) Encontre a medida do segmento A_nA_1 para uma figura arretada com $n = 5$.
(b) Encontre a medida do segmento A_nA_1 para uma figura arretada onde $n \equiv 1 \pmod 4$.

▸ **PROBLEMA 3**
O incírculo ω de um triangulo ABC toca os lados BC, AC e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Pontos distintos K, L são escolhidos em ω satisfazendo $\angle CKE + \angle BKF = \angle CLE + \angle BLF = 180°$. Prove que a reta KL é equidistante aos pontos D, E e F

▸ **PROBLEMA 4**
Seja n um inteiro positivo tal que $125n + 22$ é um potência de 3. Prove que $125n + 29$ tem um fator primo maior do que 100.