X European Girls' Mathematical Olympiad
Segundo Teste de Seleção
20 de fevereiro de 2021

▸ **PROBLEMA 1**

Letícia adora brincar com conjuntos. Em determinado dia, ela decidiu criar um conjunto L tal que para todo n inteiro positivo, exatamente um elemento entre n, $2n$ e $3n$ estivesse em L. Se 2 pertence a L, prove que 13824 não está em L

Solução:

Lema 1: $n \in L \iff 6n \in L \ \forall\, n \in N$

Vamos provar a volta primeiro. Se $6n$ está em L, então olhando as triplas $(2n, 4n, 6n), (3n, 6n, 9n)$ podemos concluir que nem $2n$ nem $3n$ estão em L, logo, pela tripla $(n, 2n, 3n)$ obtemos que $n \in L$.

No caso $n \in L$ suponhamos que $6n$ não pertence a L. Pelas triplas $(n, 2n, 3n), (2n, 4n, 6n), (3n, 6n, 9n)$ podemos concluir que $2n, 3n \notin L \implies 4n, 9n \in L$. Agora, olhando a tripla $(6n, 12n, 18n)$ obtemos que ou $12n$ ou $18n$ estão em L, ambos gerando um absurdo, já que $4n \in L \implies 12n \notin L$ e $9n \in L \implies 18n \notin L$. Portanto podemos afirmar que $n \in L \implies 6n \in L$.

Lema 2: $3n \in L \iff 4n \in L \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Se $4n \in L$, pela tripla $(2n, 4n, 6n) \implies 2n \notin L, 6n \notin L$. Como $6n \notin L \implies n \notin L$, logo, pela tripla $(n, 2n, 3n)$, $3n \in L$.
Se $3n \in L$, pela tripla $(n, 2n, 3n) \implies n, 2n \notin L$ e novamente pelo **Lema 1**, conseguimos que $6n \notin L$ também. Agora pela tripla $(2n, 4n, 6n) \implies 4n \in L$, provando o lema.

Voltando ao problema original, como $13824 = 6^3 \cdot 64$, pelo lema 1, $13824 \in L \iff 64 \in L$. Mas $64 \in L \iff 48 \in L \iff 8 \in L$, onde a primeira afirmação vale pelo **Lema 2** e a segunda pelo **Lema 1**. Para concluir, vejamos que $8 \in L \iff 6 \in L \iff 1 \in L$, e que 1 e 2 não podem simultaneamente estar em L. $\square$

▸ **PROBLEMA 2**

Defina uma figura geométrica plana de n lados de vértices $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ (com A_i adjacente a A_{i+1} para todo i inteiro tal que $1 \leq i < n$ e com A_n adjacente a A_1) como arretada quando:

(i) O segmento $\overline{A_j A_{j+1}}$ tem medida igual a $(\sqrt{2})^{j-1}$, $\forall\ 1 \leq j < n$, formando assim uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

(ii) Os ângulos $\sphericalangle A_k A_{k+1} A_{k+2} = 135^{\text{o}}$, para todo k inteiro tal que $1 \leq k \leq n-2$.

Observação: A figura formada pode não ser convexa e seus lados podem se cruzar.

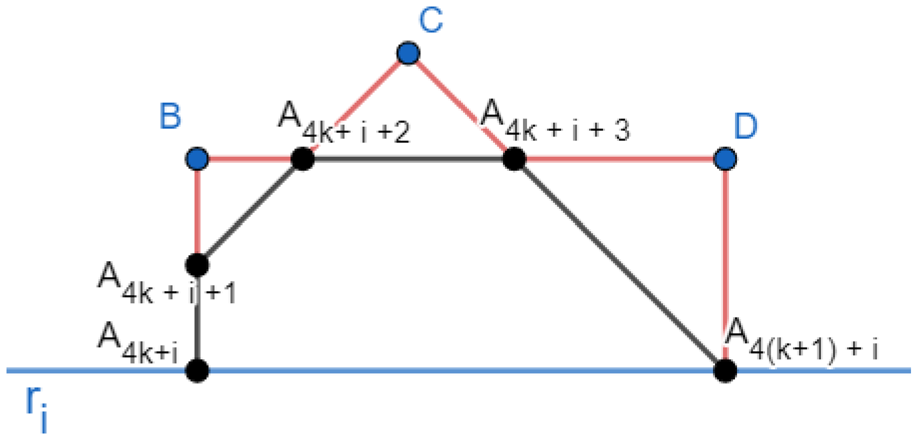
Observação 2: Os ângulos citados são medidos no sentido anti-horário.

(a) Encontre a medida do segmento $\overline{A_n A_1}$ para uma figura arretada com $n = 5$.

(b) Encontre a medida do segmento $\overline{A_n A_1}$ para uma figura arretada onde $n \equiv 1 \pmod 4$.

Solução:

Lema: *Existem retas r_0, r_1, r_2, r_3 tal que todos os pontos A_{4k+i}, com k inteiro não negativo e $0 \leq i < 4$, estão na reta r_i.*



Prova: No plano cartesiano, transponha A_{4k+i} para $(0,0)$ e A_{4k+i+1} para $(0,t)$, com $t = (\sqrt{2})^{4k+i}$. Defina B como sendo o simétrico de A_{4k+i} por A_{4k+i+1}, C, o simétrico de A_{4k+i+1} por A_{4k+i+2}, e D, o simétrico de A_{4k+i+2} por A_{4k+i+3}.

Como $\sphericalangle A_{4k+i} A_{4k+i+1} A_{4k+i+2} = 135^{\text{o}}$, temos que $\sphericalangle A_{4k+i+2} A_{4k+i+1} B = 180^{\text{o}} - 135^{\text{o}} = 45^{\text{o}}$. Assim, como também sabemos que $\overline{A_{4k+i+1} A_{4k+i+2}} = \sqrt{2} \times \overline{A_{4k+i} A_{4k+i+1}}$, temos que $\overline{A_{4k+i+1} A_{4k+i+2}}$ é diagonal do quadrado definido pelo lado $\overline{A_{4k+i+1} B}$ no sentido horário, ou seja, como $B = (0, 2t)$, $A_{4k+i+2} = (t, 2t)$.

Temos que B, A_{4k+i+2} e A_{4k+i+3} são colineares, já que $\sphericalangle B A_{4k+i+2} A_{4k+i+1} + \sphericalangle A_{4k+i+1} A_{4k+i+2} A_{4k+i+3} = 180^{\text{o}}$. Assim, a coordenada das ordenadas de A_{4k+i+3} é igual a de A_{4k+i+2} e a coordenada das abscissas é a de A_{4k+i+2} mais o tamanho de $\overline{A_{4k+i+2} A_{4k+i+3}} = 2t$, por definição. Ou seja, $A_{4k+i+3} = (3t, 2t)$.

Analogamente a prova para $A_{4k+i+1} A_{4k+i+2}$, temos que $A_{4k+i_3} A_{4(k+1)+i}$ é diagonal do quadrado definido pelo lado $A_{4k+i+3} D$ no sentido horário, ou seja, como $D = (5t, 2t)$, temos que $A_{4(k+1)+i} = (5t, 0)$ **(Fato 1)**.

Assim, definindo r_i como a reta que passa por A_{4k+i} e é perpendicular a $A_{4k+i} 4k + i + 1$, $A_{4(k+1)+i}$ também está nessa reta. Já que $A_{4(k+1)+i} A_{4(k+1)+i+1}$ é perpendicular a r_i, temos que $A_{4(k+2)+i}$ também pertencerá a essa reta por prova análoga, e assim sucessivamente.

(a) Pelo **(Fato 1)**, sabemos que se $A_1 = (0,0)$, então $A_5 = (5t, 0)$. Ou seja, $A_1 A_5 = 5t = 5 \times A_1 A_2 = 5$.

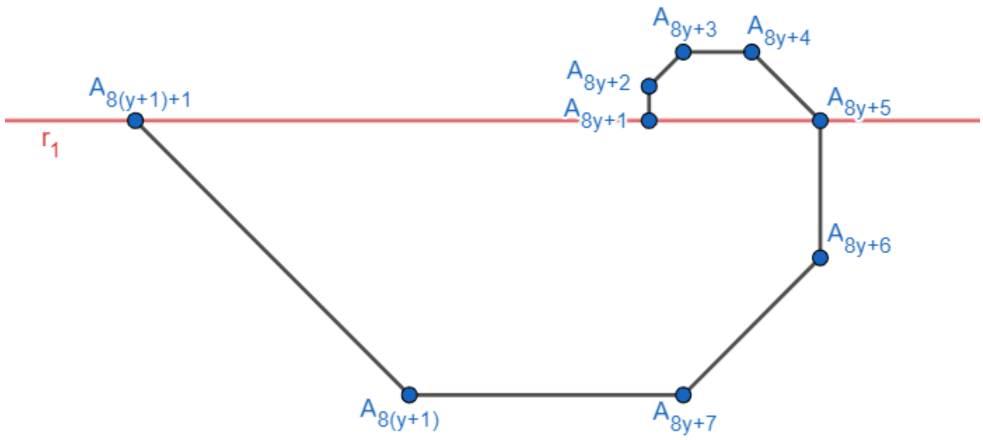
(b) Sendo $A_1 = (0,0)$ e $A_2 = (0,1)$, orientando a reta r_1 como positiva para a direita, temos que:

$$\overline{A_{8y+1} A_{8y+5}} = +5 \times \overline{A_{8y+1} A_{8y+2}} = 5 \times (\sqrt{2})^{8y}$$

e

$$\overline{A_{8y+5} A_{8(y+1)+1}} = -5 \times \overline{A_{8y+5} A_{8y+6}} = 5 \times (\sqrt{2})^{8y+4}$$

Seja $n = 4s + 1$ temos que $A_1 A_{4s+1} = A_1 A_5 + A_5 A_9 + A_9 A_{13} + \cdots + A_{4(s-1)+1} A_{4s+1}$. A partir desse ponto, teremos dois casos:



Caso I) $n = 8u + 1$
Temos que:

$$A_1A_{8u+1} = A_1A_5 + A_5A_9 + A_9A_13 + \cdots + A_{8(u-1)+5}A_{8u+1} =$$
$$5 \times [+(\sqrt{2})^0 - (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^8 - \cdots - (\sqrt{2})^{8(u-1)+4}] =$$
$$5 \times (4^0 - 4^1 + 4^2 - \cdots - 4^{2(u-1)+1})$$

Para n ímpar, temos a seguinte fórmula: $\frac{(a^n+b^n)}{(a+b)} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \times a_i \times b_{n-i}$.

$$4^0 - 4^1 + 4^2 - \cdots - 4^{2(u-1)+1} =$$
$$(4^0 - 4^1 + 4^2 - \cdots - 4^{2(u-1)+1} + 4^{2(u-1)+2}) - 4^{2(u-1)+2}$$
$$(\frac{(4^{2(u-1)+3}+1^{2(u-1)+3})}{(4+1)}) - 4^{2(u-1)+2}.$$
$$(\frac{(4^{2u+1}+1)}{5}) - 4^{2u}$$
$$(\frac{(4^{2u+1}+1-4^{2u}\times 5)}{5})$$
$$(\frac{-4^{2u}+1}{5})$$

Ou seja, desconsiderando a direção,

$$A_1A_{8u+1} = 5 \times (\frac{4^{2u}-1}{5}) = 4^{2u} - 1$$

Caso II) $n = 8v + 5$
Temos que:

$$A_1A_{8v+5} = A_1A_5 + A_5A_9 + A_9A_13 + \cdots + A_{8v+1}A_{8v+5} =$$
$$5 \times [+(\sqrt{2})^0 - (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^8 - \cdots - (\sqrt{2})^{8(v-1)+4}] + (\sqrt{2})^{8v} =$$
$$5 \times (4^0 - 4^1 + 4^2 - \cdots - 4^{2(v-1)+1} + 4^{2v})$$

Para n ímpar, temos a seguinte fórmula: $\frac{(a^n+b^n)}{(a+b)} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \times a_i \times b_{n-i}$.

$$4^0 - 4^1 + 4^2 - \cdots - 4^{2(v-1)+1} + 4^{2v} =$$
$$\frac{(4^{2v+1}+1^{2v+1})}{4+1}$$
$$\frac{(4^{2v+1}+1)}{5}$$

Ou seja

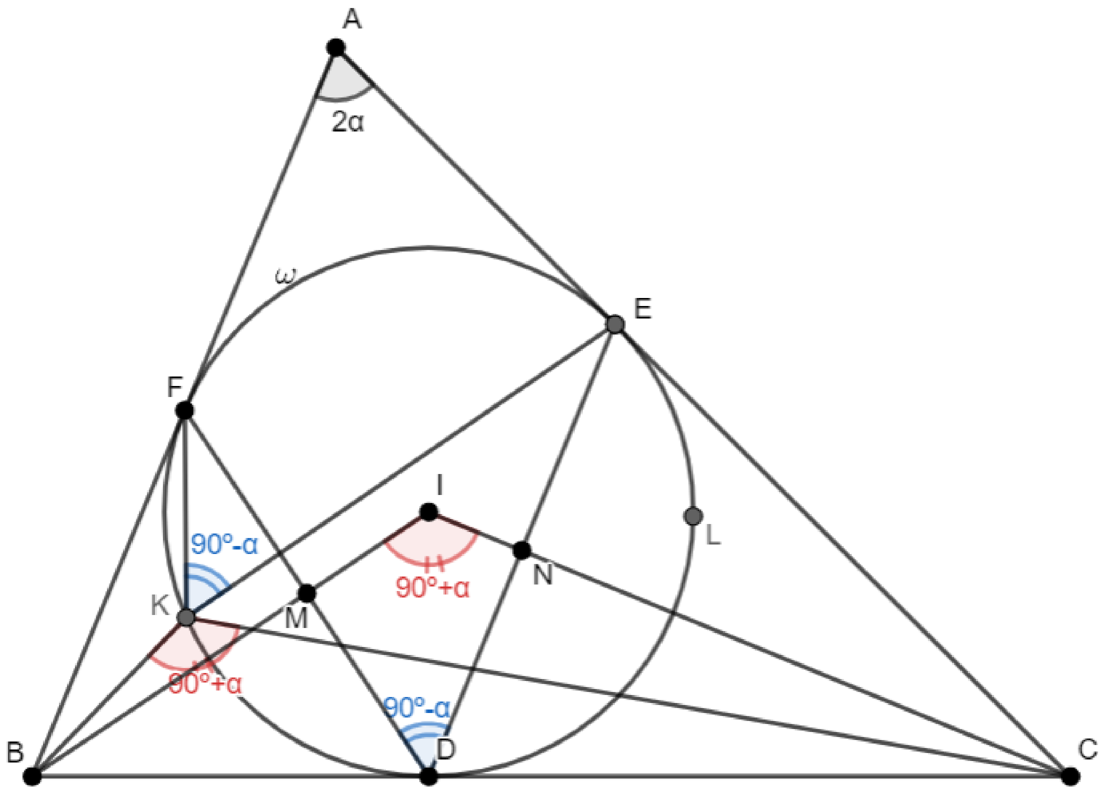
$$A_1A_{8v+5} = 5 \times (\frac{4^{2v+1}+1}{5}) = 4^{2v+1} + 1$$

$\square$

▸ **PROBLEMA 3**

O incírculo ω de um triangulo ABC toca os lados BC, AC e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Pontos distintos K, L são escolhidos em ω satisfazendo $\angle CKE + \angle BKF = \angle CLE + \angle BLF = 180°$. Prove que a reta KL é equidistante aos pontos D, E e F

Solução:



Sejam M e N os pontos médios de DF e DE, respectivamente, e $\angle A = 2\alpha$. Notemos que

$$\angle CKE + \angle BKF = 180° \iff \angle BKC + \angle FKE = 180°.$$

Porém, como $K \in \omega$

$$\implies \angle FKE = \angle FDE = 90° - \alpha, \text{ portanto } \angle BKC = 90° + \alpha = \angle BIC \implies K \in (BIC)$$

De maneira completamente analoga obtemos que $L \in (BIC)$, logo K e L são as duas interseções de w e (BIC), ou seja, $\overline{KL}$ é o eixo radical dessas duas circunferencias.

Por potência de ponto em $(AFID)$

$$Pot_{\omega}(M) = FM \times MD = IM \times MB = Pot_{(BIC)}(M) \implies M \in \overline{KL}.$$

Analogamente $N \in \overline{KL}$. Com isso, podemos concluir que $\overline{KL}$ é base média de $\triangle DEF$ e consequentemente, equidistante aos três vértices.

□

▸ **PROBLEMA 4**

Seja n um inteiro positivo tal que $125n + 22$ é um potência de 3. Prove que $125n + 29$ tem um fator primo maior do que 100.

Solução: Seja $125n + 22 = 3^k$. Podemos facilmente checar que $ord_5(3) = 4$. Testando módulo 125 temos:

$$3^4 \equiv 6 \pmod{25}, 3^8 \equiv 11 \pmod{25}, 3^{12} \equiv 16 \pmod{25}, 3^{16} \equiv 21 \pmod{25}, 3^{20} \equiv 1 \pmod{25}$$

Logo, $ord_{25}3 = 20$.
Como 3 é raiz primitiva módulo 5 e 25, então 3 é raiz primitiva módulo 5^t para todo t inteiro positivo, em particular, $t = 3 \implies ord_{125}(3) = 100$.

Checando na mão, obtemos que $3^k \equiv 22 \pmod{125} \iff k = 100l + 11$, já que $3^{11} \equiv 22 \pmod{125}$.

Olhando módulo 101 temos que

$$125n + 29 \equiv 3^k + 7 \equiv 3^{100l+11} + 7 \equiv 3^{11} + 7 \equiv 0 \pmod{101}.$$

Logo, se $125n + 22 = 3^k$ para k inteiro positivo, então $101 \mid 125n + 29$ $\square$