Treinamento EGMO

Profa. Kellem Corrêa

Equações Funcionais

Métodos básicos para resolver equações funcionais:

- Substituir valores nos lugares das variáveis (por exemplo, 0, 1, -1) e, com isso, obter novas expressões
- Indução: a partir de $f(1)$, concluir $f(n)$ para n inteiro. Encontrar $f(1/n)$ e então concluir para todo racional. Se a função for contínua, é possível estender para os reais
- Investigar injetividade e sobrejetividade, bem como monotonicidade e continuidade da função
- Encontrar zeros ou pontos fixos ($f(x) = x$)
- Usar equação de Cauchy ($f(x + y) = f(x) + f(y)$)
- Recorrência com $f(n), f(f(n)), \ldots$
- Analisar o conjunto de valores em que f assume o valor conjecturado, a meta é provar que esse conjunto é o domínio de f
- Expressar funções como somas de funções pares e ímpares
- Conjecturar a solução no início e verificar se de fato satisfaz à equação

Exercícios:

1) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos x, y reais, $f(xy) = xf(x) + yf(y)$.

2) Encontre todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Cauchy.

3) Encontre todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ que satisfazem $f(x + y) = f(x).f(y)$.

4) Encontre todas as funções contínuas $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que satisfazem $f(xy) = f(x) + f(y)$.

5) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $x + f(x) = f(f(x))$ para todo x real. Encontre todas as soluções da equação $f\big(f(x)\big) = 0$.

6) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) + f\big(x + f(y)\big) = 2x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

7) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(xy) + x^2 + y^2 = xy + f(x^2) + f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

8) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

9) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

10) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.