Teoria dos Grafos

Gustavo Empinotti - gustavoempinotti@gmail.com

March 21, 2021

Esse material traz alguns resultados interessantes em teoria dos grafos. Contudo, tenha sempre em mente que a maioria dos problemas que você vai ver sai sem nenhum teorema muito avançado, e sim na raça. Alguns problemas da lista não usam nenhum teorema, para você lembrar sempre disso.

Introdução a grafos

Definição: Um *grafo* é um conjunto de vértices (V) e arestas (A) que ligam esses vértices. Formalmente, temos $G = (V, A)$ onde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e A é um subconjunto de $V \times V$ que determina quais arestas "existem" (por exemplo, se $(v_1, v_2) \in A$, então v_1 e v_2 estão ligados.

De mãos vazias: Tente usar coisas simples como **indução** e **princípio extremo**. Em grafos, alguns exemplos de objetos máximos legais são ciclos, caminhos, cortes e casamentos. Se você precisa provar, por exemplo, que existe um conjunto com certa propriedade e pelo menos k elementos (possivelmente todos), você pode pegar o maior conjunto com tal propriedade e provar que ele tem pelo menos k elementos, porque isso lhe dá hipóteses extras (veja os primeiros problemas da lista).

Grau: O *grau* de um vértice é a quantidade de arestas que incidem nele.
- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo é duas vezes o número de arestas. Em particular, a soma dos graus é sempre par.
- Em um grafo, o número de vértices com grau ímpar é sempre par.

Problemas

1. (APMO 2008) Em uma sala de 46 pessoas, os estudantes formam grupos de três pessoas de modo que quaisquer dois grupos distintos têm no máximo um estudante em comum. Prove que existe um conjunto de 10 alunos que não contém nenhum grupo inteiro.

2. (USAMO 1989) Os 20 membros de um clube de tênis montam um torneio com exatamente 14 jogos (de um contra um), e todo membro joga pelo menos um jogo. Prove que deve existir um conjunto de 6 jogos com 12 pessoas diferentes.

3. Vinte jogadores participaram de um torneio de xadrez. Cada jogador enfrentou todo outro jogador exatamente uma vez e cada partida terminou com a vitoria de um dos jogadores ou em empate. Nesse torneio, notou-se que para cada partida que terminou em empate, cada um dos demais 18 jogadores venceu pelo menos um dos dois jogadores envolvidos nela. Sabemos ainda que pelo menos dois jogos terminaram em empate. Mostre que e possivel nomear os jogadores como $P_1, P_2, ..., P_{20}$ de modo que o jogador P_k ganhou do jogador P_{k+1}, para cada $k \in 1, 2, 3, ..., 19$.

4. (OBM 2006) Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, ..., J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, ... , J_{k-1} ganhou de J_k e J_k ganhou de J_1. Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

5. O parlamento de Bruzundanga consiste de uma casa. Todo membro tem no máximo três inimigos dentre os restantes. Mostre que é possível separar a casa em duas casas de tal forma que cada membro tenha no máximo um inimigo em sua casa.

6. As cidades $C_1, C_2, ..., C_N$ são atendidas por n linhas aéreas. Há voos diretos entre quaisquer duas cidades oferecidos por pelo menos uma linha aérea e todas as linhas oferecem voos nos dois sentidos. Encontre o menor valor de N que garante a existência de pelo menos uma linha aérea que oferece um ciclo de viagens com uma quantidade ímpar de escalas.

Ciclos e árvores

Ciclos e árvores: Um *ciclo* em um grafo é um subconjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de V tal que $v_i v_{i+1} \in A$ para $i = 1, 2, \dots, m$, com índices módulo m (isto é, $v_{m+1} = v_1$).

Um grafo é chamado de *árvore* se ele não tem ciclos.

- Uma árvore conexa de n vértices tem exatamente $n-1$ arestas.

- Em particular, um grafo com n vértices e menos de $n-1$ arestas não é conexo.

- Um vértice de grau 1 é chamado de *folha*. Toda árvore tem ao menos duas folhas.

Deletar ciclos mantém conexidade: Uma ideia importante é que se você escolhe um ciclo em um grafo e deleta uma de suas arestas, ele continua conexo (por quê?).

Árvore geradora: Usando a ideia acima, para qualquer grafo conexo podemos deletar arestas de ciclos sem quebrar sua conexidade, até que cheguemos a uma árvore (subgrafo do grafo original) que passa por todos os vértices. Chamamos essa árvore de *árvore geradora*, e em muitos problemas é útil focar nela.

Caracterização de grafos bipartidos: Um grafo é dito *bipartido* se o conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos A e B de forma que todas as arestas de V contém um vértice em A e um em B. Em outras palavras, não existem arestas dentro de A nem de B (p.s.: dizemos que A e B particionam V se $V = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$.

- Teorema: Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos ímpares.

7. (MOP Test 2008) As arestas de um grafo completo de n vértices são coloridas de forma que nenhuma cor é usada em mais de $n-2$ arestas. Prove que existe um triângulo com três cores.

8. (BAMO 2005) Há 1000 cidades no país de Euleria, e alguns pares de estradas são ligados por estradas de terra. É possível chegar de qualquer cidade a qualquer outra através dessas estradas. Prove que o governo de Euleria pode pavimentar as estradas de forma que cada cidade tenha uma quantidade ímpar de estradas pavimentadas levando a ela.

9. (IMOSL 2004) A seguinte operação é permitida num grafo finito: escolha um ciclo qualquer de tamanho 4 (se existir), escolha uma aresta no ciclo e delete-a. Para $n \geq 4$, encontre o menor número de arestas que pode ser atingido com essa operação partindo-se de um n-clique.

Outros resultados

Ordem mediana em torneios: Um *torneio* é um grafo completo orientado, isto é, as arestas têm direção. Uma ideia particularmente útil para esse grafos é a ordem mediana. A ordem mediana é a ordenação $v_1, v_2, ..., v_n$ que maximiza a quantidade de arestas que "vão para a frente", isto é, a quantidade de arestas de v_i para v_j com $i < j$.

Propriedades:

(i) $v_1, v_2, ..., v_n$ formam, nessa ordem, um caminho hamiltoniano;

(ii) Sendo $i < j$, v_i domina pelo menos metade dos vértices $v_{i+1}, ..., v_j$ e v_j é dominado por pelo menos metade dos vértices $v_i, ...v_{j-1}$.

10. Um vértice em um torneio é um "rei" se todo vértice pode ser alcançado a partir dele através de no máximo duas arestas. Prove que todo torneio tem um rei.

Teorema dos Casamentos: Um *casamento* é um subconjunto das arestas de um grafo sem arestas adjacentes. Para um subconjunto S qualquer de vértices, definimos a vizinhança $N(S)$ de S como o conjunto de vértices que estão ligados a algum vértice de S. Em um grafo bipartido no qual A é uma das classes de vértices, existe um casamento cobrindo todos os vértices de A se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.

11. (Teorema de Konig-Egervary) As entradas de uma matriz são 0 ou 1. Prove que a quantidade máxima de uns que podem ser escolhidos de modo que quaisquer dois deles não estejam na mesma linha nem na mesma coluna é igual à quantidade mínima de linhas e colunas que devem ser deletadas para remover todos os uns da matriz.

12. Seja A uma matriz quadrada n x n de entradas inteiras não-negativas, em que a soma de cada linha e de cada coluna é igual ao inteiro positivo m. Prove que A pode ser expressa como a soma de m matrizes $A = P_1 + P_2 + ... + P_m$ de forma que cada P_i tem a soma de cada linha e de cada coluna igual a 1.

13. (J. Hirata) Suponha que um baralho de cartas normal de 52 cartas foi dividido em 13 pilhas de 4 cartas cada. Prove que se pode escolher uma carta de cada pilha de modo que haja entre as escolhidas uma carta de cada número (1 a 13).

14. Em um planeta, há 2^N países ($N \geq 4$). Cada país tem uma bandeira de altura N e largura 1, dividida em N quadrados da maneira convencional, cada um amarelo ou azul. Não há duas bandeiras iguais. Diz-se que um conjunto de N bandeiras é "diverso" se essas bandeiras podem ser dispostas num quadrado N x N de forma que os quadrados na diagonal principal tenham a mesma cor. Determine o menor inteiro positivo M tal que entre quaisquer M bandeiras distintas, existem N formando um conjunto diverso.

Teorema de Turán: Um *clique*, também chamado de *grafo completo*, é um grafo onde todo par de vértice é ligado.

Chamamos de $n-clique$ ou K_n o clique de n vértices.

Fixado o número n de vértices em um grafo, um grafo de n vértices sem m-cliques atinge a quantidade máxima possível de arestas quando seus vértices são particionados em $m-1$ classes, dois vértices são ligados se e somente se estão em classes diferentes, e os tamanhos das classes variam em no máximo 1 unidade (isto é, cada classe tem $\lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{k-1} \rceil$ vértices).

15. Em um 6-clique, pinta-se cada aresta de azul ou vermelho. Prove que existe um triângulo monocromático (não é necessário usar Turán para esse problema; mas é um resultado importante relativo a cliques)

16. (IMO 92) Considere nove pontos no espaço sem quatro coplanares. Cada par de pontos é ligado por uma aresta e cada aresta é colorida de azul, vermelho ou não é colorida. Encontre o menor valor de n tal que, sempre que se pintam exatamente n arestas, o conjunto das arestas coloridas necessariamente contém um triângulo monocromático.

17. (IMO 2003) Seja A um subconjunto do conjunto $S = \{1, 2, ..., 1000000\}$ com exatamente 101 elementos. Demonstre que existem números $t_1, t_2, ..., t_{100}$ em S tais que os conjuntos $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$, para $j = 1, 2, ..., 100$, são disjuntos dois a dois.

18. (OBM 2005) Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

Planaridade: Um grafo é planar quando ele *pode ser desenhado* de forma que suas arestas não se cruzem. Em um grafo planar, sendo V o número de vértices, A o de arestas, e F o de faces, vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$ (cuidado ao contar o número de faces: uma das faces é a face "infinita").

19. (OBM 2004) Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice de cada triângulo incida o mesmo número de segmentos.

20. Há n pontos no plano. A distância entre quaisquer dois deles é maior que ou igual a 1. Prove que o número de distâncias iguais a 1 é menor que ou igual a $3n - 6$. (Curiosidade: a melhor cota é $\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$).

Ciclos em permutações: Cada permutação $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$ de $1, 2, ..., n$ define um multigrafo orientado cujos vértices são os números $1, 2, ..., n$ e existe uma aresta de i para j se e somente se $\sigma(i) = j$. Esse multigrafo é uma união de ciclos. (Multigrafos são como grafos, mas podem ter arestas ligando vértices a si mesmos e mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices).

21. Em um torneio com $2n$ participantes, cada um deles inventa seu próprio problema. Cada um dos $2n$ problemas é distribuído entre os participantes e cada um fica com um problema. Uma distribuição é balanceada quando existem n participantes cujos problemas foram distribuídos para os outros n participantes e vice-versa. Prove que o número de distribuições balanceadas é um quadrado perfeito.

Outros

22. (Rússia 2005) Cem pessoas de 25 países, quatro de cada país, estão sentadas em círculo ao redor de uma mesa. Prove que é possível dividir as 100 pessoas em quatro grupos de modo que não haja pessoas do mesmo país nem duas pessoas vizinhas do círculo no mesmo grupo.

23. Há n pontos no plano. A distância entre quaisquer dois deles é menor que ou igual a 1. Prove que o número de distâncias iguais a 1 é menor que ou igual a n.

24. Dados n pontos no plano, prove que é possível retirar um deles de forma que os $n - 1$ restantes possam ser divididos em dois grupos de forma que o diâmetro de cada um dos dois grupos seja menor do que o diâmetro do conjunto inicial de n pontos.

25. Dada uma 22-upla ordenada de números reais distintos, João pode escolher dois números nela e trocar suas posições. Para fazer uma operação dessas, João deve pagar 1 real. O objetivo de João é deixar os números em ordem crescente. João tem apenas 20 reais. Conseguirá ele atingir seu objetivo, para qualquer 22-upla inicial?

26. Um tabuleiro n x n é preenchido com 0s e 1s de forma que não haja duas linhas iguais. Prove que alguma coluna pode ser retirada de forma que o tabuleiro restante ainda não tenha linhas iguais.

27. Numa competição matemática, alguns competidores são amigos. A amizade é sempre mútua. Um grupo de amigos é dito um clique se cada dois deles são amigos (em particular, todo grupo de menos de duas pessoas é um clique). O número de pessoas em um clique é dito seu tamanho.

    Dado que, nessa competição, o tamanho do maior clique é par, prove que os competidores podem ser divididos em duas salas de modo que o tamanho do maior clique em uma das salas é igual ao tamanho do maior clique na outra sala.

28. Um tabuleiro n x n é preenchido com 0s e 1s de forma que dentre quaisquer n 1s, há dois na mesma linha ou na mesma coluna. Prove que para algum par (a, b) com $a + b \geq n + 1$, existem a linhas e b colunas que se intersectam apenas em 0s.

29. (RMM 2019) Dado qualquer real $\epsilon > 0$, prove que, para todos exceto uma quantidade finita de inteiros positivo n, qualquer grafo simples com n vértices e pelo menos $(1 + \epsilon)n$ arestas tem dois ciclos simples distintos de tamanhos iguais.

    Nota: um grafo *simples* é um grafo sem *loops* (arestas que ligam um vértice a si próprio) e sem arestas duplas (mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices).

    Um ciclo *simples* é um ciclo sem arestas nem vértices repetidos.

    O tamanho de um ciclo é a sua quantidade de vértices.