# Geometria Projetiva

Francisco Moreira

moreiramachadoneto@gmail.com

Treinamento EGMO 2021

Nesta aula vamos discutir uma das ferramentas mais fundamentais da geometria projetiva: **Razões Cruzadas.** Problemas que lidam predominantemente com retas concorrentes, interseções, círculos tangentes, retas paralelas, dentre varias outras propriedades, normalmente acabam involvendo aplicações espertas de geometria projetiva, e é isso que torna este conjunto de teoremas e técnicas tão poderoso.

## 1 Pontos no Infinito

Geometria projetiva é comumnente atribuida aos famigerados pontos no infinito, e de fato, estes são parte indispensável desta teoria.

Para dar uma motivação, vejamos os dois trilhos abaixo. Como podemos perceber, a medida que olhamos para mais e mais longe, estes parecem convergir para um mesmo ponto no horizonte, além do que podemos observar. Este "ponto no horizonte" é um dos ponto no infinito.

Trilhos paralelos parecem se encontrar no infinito

Agora que estamos mais confortáveis com estes pontos, vamos definir mais rigorosamente o **Plano Projetivo.**

**Definição.** O **plano projetivo** é uma extensão do **Plano Euclidiano** que contêm todos os pontos Euclidianos comuns, assim como um ponto no infinito para cada classe de retas. Uma classe de retas representa uma direção no plano Euclidiano, *i.e* duas retas estão na mesma classe se e somente se são paralelas. Para cada classe definimos o ponto no infinito desta como o ponto em comum a todas as suas retas.

O **plano projetivo** também inclui uma reta extra chamada de **reta do infinito,** a qual contêm todos os pontos no infinito.

Com a noção do Plano Projetivo bem definida, todas as retas agora concorrem em exatamente um ponto, e não precisamos mais nos preocupar com o caso em que duas retas seriam paralelas.

# 2 Razões Cruzadas

## 2.1 Retas

**Definição.** Dados 4 pontos distintos e colineares $A, B, X, Y$ (os quais podem ser pontos no infinito), definimos sua **razão cruzada** por:

$$(A, B; X, Y) = \frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB},$$

onde as distâncias acima são orientadas.

Notemos que $(A, B; X, Y) > 0$ exatamente quando $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ forem disjuntos, ou um estiver contido no outro.

**Definição.** Sejam $a, b, x, y$. Definimos a razão cruzada dessas retas por:

$$(a, b; x, y) = \frac{\sin \angle(x, a)}{\sin \angle(x, b)} : \frac{\sin \angle(y, a)}{\sin \angle(y, b)}.$$

onde os ângulos são orientados.

**Definição.** Sejam $A, B, X, Y$ quatro pontos colineares, e $P$ um ponto fora desta reta comum. Definimos

$$P(A, B; X, Y) = (PA, PB; PX, PY).$$

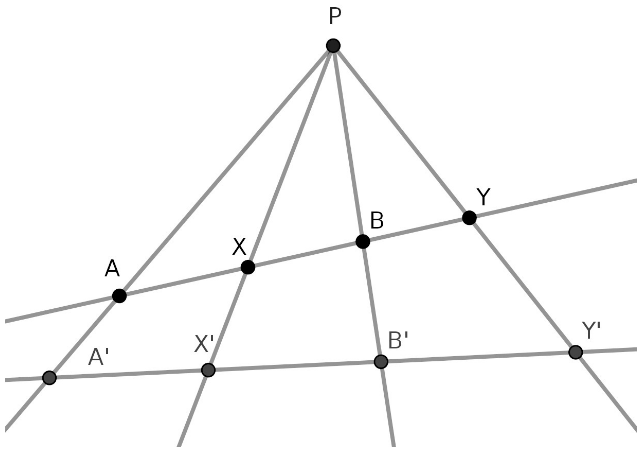
Chamamos $P(A, B; X, Y)$ de um **feixe** de retas.

Com as definições iniciais feitas, podemos finalmente obter alguns resultados interessantes.

**Lema 2.1.** Sejam $A, B, X, Y$ e $P$ os mesmos pontos da definição acima, então:

$$P(A, B; X, Y) = (A, B; X, Y).$$

**Rascunho da Prova.** Basta aplicar lei dos senos nos triângulos $\triangle XPA, \triangle XPB, \triangle YPA, \triangle YPB$. ■




O lema acima é muito importante, pois é base para uma das propriedades mais importantes das **razões cruzadas**: a sua invariância sobre projeções.

Conforme a figura acima, tomemos duas retas $l, m$ e um ponto fora de ambas, $P$. Sejam $A, B, X, Y$ pontos em $l$ e $A', B', X', Y'$ as suas projeções por $P$ em $m$, então:

$$(A, B; X, Y) = P(A, B; X, Y) = P(A', B'; X', Y') = (A', B'; X', Y').$$

Ou seja, podemos projetar quatro pontos de uma reta $l$ para uma reta $m$ e manter a razão cruzada. Usamos a seguinte notação para denotar esta invariância:

$$(A, B; X, Y) \stackrel{P}{=} (A', B'; X', Y').$$

## 2.2 Círculos

Assim como definimos razão cruzada para 4 pontos colineares, podemos fazer para 4 pontos concíclicos, e surpreendentemente, a maior parte das propriedades se mantêm. Definamos a razão cruzada de quatro pontos concíclicos por:

$$(A, B; X, Y) = \frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB}.$$

Definamos também um feixe de retas $P(A, B; X, Y) = (PA, PB; PX, PY)$, onde $P, A, B, X, Y$ são todos concíclicos.

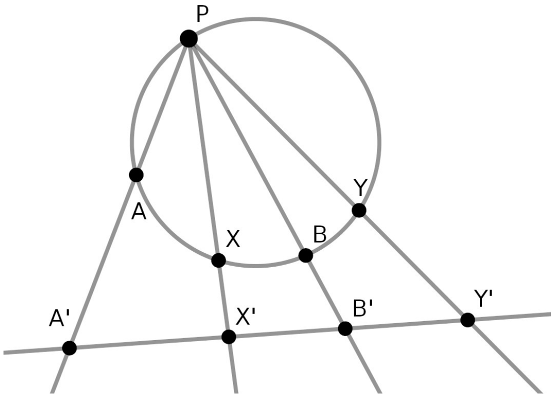
**Lema 2.2.** Sejam $A, B, C, D$ pontos concíclicos. Seja $P$ um ponto também neste circuncírculo, então:

$$P(A, B; X, Y) = (A, B; X, Y),$$

ou seja, esta razão cruzada **não** depende de $P$.

**Prova.** A prova é completamente analoga a do **Lema 2.1** e fica como exercício. ∎

Analogamente a como fizemos para argumentar que a razão cruzada é invariante em uma projeção de reta para reta, podemos provar que esta invariância também vale numa projeção de circunferência para reta.




Tomemos $P, A, B, X, Y$ concíclicos e uma reta $m$ que não passa por $P$. Sejam $A', B', X', Y'$ as projeções dos pontos $A, B, X, Y$ por $P$ em $m$, então:

$$(A, B; X, Y) \overset{\text{Lema 2.2}}{=} P(A, B; X, Y) = P(A', B'; X', Y') \overset{\text{Lema 2.1}}{=} (A', B'; X', Y').$$

Portanto, projetar uma circunferência por um ponto $P$ que pertence a ela numa reta mantêm a razão cruzada. Denotamos isso de maneira exatamente igual a como denotamos projeções por retas, i.e:

$$(A, B; X, Y) \overset{P}{=} (A', B'; X', Y').$$

### 2.2.1 Problemas dessa sessão

**Questão 1.** Sejam $A, B, X$ pontos colineares distintos e $P_\infty$ o ponto no infinito da reta que passa por eles. Compute $(A, B; X, P_\infty)$

**Questão 2.** Sejam $A, B, X$ pontos colineares distintos, e $k$ um número real. Prove que existe exatamente um ponto $Y$ (possivelmente no infinito) tal que $(A, B; X, Y) = k$

**Questão 3** (Teorema de Pascal)**.** Seja $ABCDEF$ um hexágono cíclico. Seja $AB \cap DE = X$, $BC \cap EF = Y$ e $CD \cap FA = Z$. Prove que $X, Y, Z$ são colineares.

**Rascunho da Prova.** Sejam $P = EF \cap AB$, $Q = AF \cap BC$ e $T = XT \cap AF$, então queremos provar que $T = Z$. Pela questão 2, basta que provemos $(A, Z; Q, F) = (A, T; Q, F)$. Primeiro, notemos que

$$(A, T; Q, F) \overset{Y}{=} (A, X; B, P).$$

Agora podemos abusar o fato do hexágono ser cíclico para continuar as projeções, e obter

$$(A, X; B, P) \overset{E}{=} (A, D; B, F) \overset{C}{=} (A, Z; Q, F)$$

Logo $(A, Z; Q, F) = (A, X; B, P) = (A, T; Q, F) \implies T = Z.$ ■

**Questão 4.** Seja $ABC$ um triângulo inscrito em um círculo. Definimos o círculo $A-$mixtlinear deste triangulo como a circunferência tangente aos lados $AB, AC$ do triângulo e que também é tangente ao circuncírculo de $ABC$. Prove que sendo $K, L$ os pontos de tangência do $A-$mixtlinear com $AB, AC$, respectivamente, então o incentro $I$ de $ABC$ é o ponto médio de $KL$.
(Dica: Use o Teorema de Pascal)

# 3 Quádruplas Harmônicas

Já vimos que razões cruzadas no geral podem serem úteis, mas o caso mais importante destas é quando $(A, B; X, Y) = -1$. Nós dizemos que quando uma quádrupla de pontos colineares satisfaz esta propriedade, então esta é uma **quádrupla harmônica**. Analogamente, quando quatro pontos concíclicos satisfazem essa propriedade, então estes são um **quadrilátero harmônico**.

**Lema 3.1.** Tomemos dois pontos $A, B$, $M$ o ponto médio deste e $P_\infty$ o ponto no infinito desta reta. Então $(A, B; M, P_\infty) = -1$

**Prova.** Este lema é uma consequência direta da questão 1. ■

**Problema 5** (IMO 2014). Os pontos $P$ e $Q$ encontram-se sobre o lado $BC$ de um triângulo $ABC$ de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos $M, N$ encontram-se sobre as retas $AP$ e $AQ$, respectivamente, de modo que $P$ é o ponto médio de $AM$ e $Q$ é o ponto médio de $AN$. Prove que as retas $BM$ e $CN$ se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo $ABC$.

**Lema 3.2** (Ceva-Menelaus). Seja $ABC$ um triângulo com três cevianas concorrentes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$,$\overline{CF}$. Seja também $X = EF \cap BC$, então $(B, C; X, D) = -1$.

**Lema 3.3.** Dado um feixe $AB, AD, AC, AE$ com $B, C, D$ e $E$ colineares e $AD \perp AE$, então:

$$(B, C; D, E) = -1 \iff AD \text{ e } AE \text{ são bissetrizes interna e externa do } \angle BAC.$$

**Problema 6** (OBM 2007). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, $P$ a interseção das retas $AB$ e $CD$, $Q$ a interseção das retas $AD$ e $BC$ e $O$ a interseção das diagonais $AC$ e $BD$ . Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto, então $PO$ é a bissetriz de $\angle AOD$ e $QO$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

**Lema 3.4.** Sejam $\omega$ uma circunferência e $P$ um ponto fora desta. Sejam $PX, PY$ as tangentes de $P$ para $\omega$. Considere uma reta que passa por $P$ e intersecta $\omega$ em dois pontos, $A, B$. Então:
(a) Prove que $AXBY$ é um quadrilátero harmônico.
(b) Seja $Q = AB \cap XY$, então $(A, B; Q, P) = -1$

**Questão 7.** Sejam $A, B, X, Y$ pontos colineares tais que $(A, B; X, Y) = -1$, e seja $M$ o ponto médio de $AB$, então:
- $YA \cdot YB = YM \cdot YX$
- $MY \cdot MX = MA^2$

## 4 Problemas Propostos

A seguir vem alguns problemas de olímpiadas, dentre os inúmeros em que as técnicas de geometria projetiva se provam úteis. Eu recomendo que antes de tentar resolver os problemas propostos, tentem resolver todos os exercícios acima, pois estes serão importantes lemas na resolução dos problemas a seguir.

**Problema 0.** Tente resolver todos os problemas acima!

**Problema 1** (IMO/SL 1995)**.** O incírculo de um triângulo $ABC$ toca os lados $BC, CA$ e $AB$ em $D, E, F$, respectivamente. Seja $X$ um ponto no interior do triângulo $ABC$ tal que o incírculo de $XBC$ toca $BC$ em $D$ e toca $CX$ e $BX$ em $Y$ e $Z$, respectivamente. Prove que $E, F, Z, Y$ são concíclicos.

**Problema 2** (USAJMO 2011)**.** Pontos $A, B, C, D, E$ estão sobre uma circunferência $\omega$ e $P$ é um ponto exterior a esta circunferência. Sabendo que $PR$ e $PD$ são tangentes a $\omega$, que $P, A$ e $C$ são colineares e que $DE \parallel AC$, prove que $BE$ bissecta $AC$

**Problema 3** (APMO 2013)**.** Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência $\omega$, e $P$ um ponto no prolongamento de $AC$ tal que $PB$ e $PD$ são tangentes a $\omega$. A tangente por $C$ intersecta $PD$ em $Q$ e a reta $AD$ em $R$. Seja $E$ o segundo ponto de interseção entre $AQ$ e $\omega$. Prove que $B, E$ e $R$ são colineares.

**Problema 4.** Seja $ABC$ um triângulo, $I$ o seu incentro, e $D, E$ e $F$ os pontos de contato do incírculo com $BC, AC$ e $AB$, respectivamente. Seja $K = EF \cap BC$. Prove que $IK \perp AD$.

**Problema 5** (ELMO/SL 2012)**.** Seja $ABC$ um triângulo com incentro $I$. O pé da perpendicular de $I$ para $BC$ é D, e o pé de $I$ para $AD$ é $P$. Prove que $\angle BDP = \angle DPC$

**Problema 6** (Ibero 2013)**.** Seja $XY$ um diâmetro de uma circunferência $\Gamma$ e $N$ o ponto médio de um dos arcos $XY$ de $\Gamma$. Sejam $A$ e $B$ dois pontos sobre o segmento $XY$. As retas $NA$ e $NB$ intersectam $\Gamma$ novamente em $C$ e $D$, respectivamente. As tangentes a $\Gamma$ em $C, D$ se intersectam em $P$. Seja $M$ o ponto de interseção entre $NP$ e $XY$. Prove que $M$ é o ponto médio do segmento $AB$.

**Problema 7** (Sharygin 2013)**.** Seja $AD$ a bissetriz interna do triângulo $ABC$, com $D$ em $BC$. Sejam $M, N$ as projeções de $B$ e $C$ em $AD$, respectivamente. O círculo com diâmetro $MN$ intersecta $BC$ nos pontos $X$ e $Y$. Prove que $AD$ é bissetriz de $\angle XAY$

**Problema 8.** Seja $AD$ a altura de um triângulo acutângulo $ABC$. Seja $P$ um ponto qualquer no segmento $AD$. Sejam $M, N$ as interseções de $BP$ e $CP$ com $AC$ e $AB$, respectivamente. Seja $Q$ o ponto de encontro de $AD$ com $MN$ e $F$ um ponto qualquer no segmento $AC$. Finalmente, definamos $E$ como a interseção de $FQ$ com $CN$. Prove que $\angle FDA = \angle EDA$.

**Problema 9** (IMO/SL 2004)**.** Dado um quadrilátero cíclico $ABCD$, seja $M$ o ponto médio de $CD$ e seja $N$ um ponto no circuncírculo de $ABM$ tal que $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM} (N \neq M)$. Prove que $E, F, N$ são colineares, onde $E = AC \cap BD$ e $F = BC \cap DA$.

**Problema 10** (Sharygin 2013)**.** O incírculo do triângulo $ABC$ toca $BC, CA, AB$ em $A', B', C'$, respectivamente. A perpendicular partindo do incentro para a $C-$mediana intersecta a reta $A'B'$ em $K$. Prove que $CK \parallel AB$.