Sequências

25 de março de 2021

1. (Singapura 2010) Sejam (a_n) e (b_n) sequências definidas por $a_1 = 1, b_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = 7a_n + 12b_n + 6 \text{ e } b_{n+1} = 4a_n + 7b_n + 3.$$

Prove que a_n^2 é a diferença de dois cubos consecutivos.

2. A sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é definida por

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Mostrar que a_n é um número inteiro para todo n.

3. Seja a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dada por $a_1 = 1, a_2 = 4$ e para todo $n > 1$:

$$a_n = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1} + 1}$$

(a) Prove que todos os termos da sequência são inteiros positivos.

(b) Prove que $2a_n.a_{n+1} + 1$ é um quadrado perfeito para todo inteiro positivo n.

4. (OBM 2004) Considere a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_n a_{n-4} = a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2$. Mostre que todos os termos dessa seqüência são números inteiros.

5. Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ onde $x_1 = 1, x_2 = 2011$ E $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\dfrac{x_{2012} + 1}{2012}$ é um quadrado perfeito.

6. Uma sequência satisfaz $a_1 = \frac{1}{2}$ e

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n \text{ para } n \geq 2.$$

Encontre uma fórmula fechada para a_n.

7. (Lista CS) Sejam a, b inteiros positivos. A sequência $x_1, x_2, ...$ é definida por:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Prove que existe um inteiro positivo k para o qual $x_k = 0$.

8. (Ibero 2002) A sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots$ é definida por: $a_1 = 56$ e $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$, para todo $n \geq 1$. Mostre que existe um inteiro $1 \leq k \leq 2002$ tal que $a_k < 0$.

9. (IMO 1985) Para todo número real x_1, construa a sequência $x_1, x_2, ...$ por

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right), \text{ para cada} n \geq 1.$$

Prove que existe exatamente um valor de x_1 para o qual $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ para todo n.

10. A sequência numérica $x_1, x_2, ...$ satisfaz $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ para todos os inteiros k. Encontre a parte inteira da soma:

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+...+\frac{1}{x_{100}+1}$$

Observação: a parte inteira de x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro que não é maior que x.

11. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequências de reais positivos tais que

$$a_{n+1}=\sqrt{6-2a_n^2},\ \forall\ n\geq 1.$$

Prove que a sequência é constante.

12. (IMO 2014) Let $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

$$a_n < \frac{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

13. (Cone Sul 1993) Prove que existe uma sucessão $a_1, a_2, ...$, em que a_i é um dígito (ou seja, a_i pertence a $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $a_0 = 6$, tais que, para cada inteiro positivo n, o número $x_n = a_0 + 10a_1 + ... + 10^{n-1}a_{n-1}$ verifica que $x_n^2 - x_n$ é divisível por 10^n.

14. (Cone Sul 2003) Considere a sequência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n + 1,\ \forall\ n \geq 1$$

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

15. A sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é definida por $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ e, para $n \geq 4$,

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

Prove que, para todo n, a_n é um inteiro múltiplo de $n!$.

16. Considere a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$, tal que $a_n = 4a_{n-1}(1-a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Sabe-se que $a_{2015} = 0$. Quantos são os possíveis valores de a_1?

17. Seja $\{a_n\}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros que satisfazem a recorrência

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} \text{ para } n > 2 \text{ e } a_4 = 194.$$

Encontrar a_5.