Language: **Portuguese**

Day: **01**

Quarta-feira, 24 de março de 2021

Problema 01. Seja n um inteiro positivo. Em um tabuleiro $n \times n$, coloca-se uma peça especial: a **condessa**. Se ela estiver na **k-ésima** coluna ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), o seu movimento consiste em pular para uma das casas na **k-ésima** linha. Prove que existe uma sequência de n^2 movimentos na qual a condessa passa por todos os quadrados 1×1 e volta para a casa inicial no fim.

Problema 02. Dado $ABCD$ um trapézio com lados paralelos AB e CD, seja E um ponto na reta BC exterior ao segmento BC, tal que o segmento AE intersecta o segmento CD. Assuma que existe um ponto F dentro do segmento AD tal que $\angle EAD = \angle CBF$. Denote como I o ponto de intersecção entre CD e EF, e J o ponto de intersecção entre AB e EF. Seja K o ponto médio de EF, e assuma que K é diferente de I e J.

Prove que K pertence ao circuncírculo do ΔABI se, e somente se, K pertence ao circuncírculo de ΔCDJ.

Problema 03. Nos é dado um primo $p > 3$. Seja K o número de permutações $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ de $\{1, 2, \ldots, p\}$ tal que

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{p-1}A_p + A_pA_1$$

é divisível por p. Prove que $K + p$ é divisível por p^2.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos