Tabuleiros

30 de março de 2021

Ana Studart

⋄ Tabuleiros na EGMO

Problema 01. (EGMO 2018) Um dominó é uma peça de tamanho 1×2 ou 2×1. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Dominós são colocados em um tabuleiro quadriculado $n \times n$ de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro e os dominós não se sobrepõem. O *valor* de uma linha ou coluna do tabuleiro é o número de dominós que cobre pelo menos uma casa dessa linha ou coluna. Uma configuração de dominós no tabuleiro é chamada balanceada se existe algum $k \geq 1$ tal que cada linha e cada coluna tem valor k.

Prove que uma configuração balanceada existe para todo $n \geq 3$, e encontre o menor número de dominós necessários para tal configuração.

Problema 02. (EGMO 2013) Determine todos os inteiros positivos m para os quais $m \times m$ pode ser dividido em 5 retângulos, cujos lados são os inteiros $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ em alguma ordem.

Problema 03. (EGMO 2015) Um dominó é uma peça 2×1 ou 1×2. Determine de quantas maneiras podemos colocar exatamente n^2 dominós, sem sobreposições, em um tabuleiro $2n \times 2n$ de forma que todo quadrado 2×2 contém pelo menos dois quadrados 1×1 vazios que estão na mesma linha ou coluna.

Problema 04. (EGMO 2019) Seja n um inteiro positivo. Dominós são colocados em um tabuleiro $2n \times 2n$ de forma que toda casa do tabuleiro é adjacente a exatamente uma casa coberta por um dominó. Para cada n, determine o maior número de dominós que podem ser colocados no tabuleiro dessa maneira.

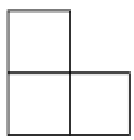
(Um dominó é uma peça de tamanho 2×1 ou 1×2. Dominós são colocados no tabuleiro de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro, e dominós não podem se sobrepor. Duas casas do tabuleiro são chamadas adjacentes se elas são diferentes e têm um lado em comum.)

Problema 05. (EGMO 2016) Seja m um inteiro positivo. Considere um tabuleiro com $4m \times 4m$ quadradinhos. Dois quadradinhos diferentes são relacionados um com o outro se eles estão na mesma coluna ou na mesma linha. Nenhum quadradinho é relacionado com ele mesmo. Alguns quadradinhos são coloridos de azul, tal que cada quadradinho é relacionado a no mínimo dois quadradinhos azuis. Determine o número mínimo de quadradinhos azuis.

Problema 06. (EGMO 2016) Seja k e n inteiros tais que $k \geq 2$ e $k \leq n \leq 2k - 1$. Posicione peças retangulares, cada uma de tamanho $1 \times k$, ou $k \times 1$ em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ tal que cada peça cubra exatamente k casas e não haja sobreposições. Repita esse processo até que não seja mais possível colocar nenhuma peça. Para cada k e n, determine o número mínimo de peças que tal arranjo pode conter.

⋄ Tabuleiros em outras olimpíadas

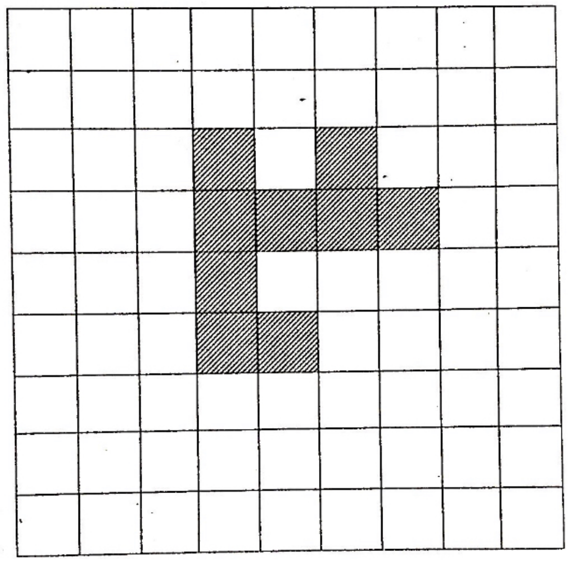
Problema 07. (Olimpíada de Maio 2004) Em um quadrado 9×9 é dividido em quadradinhos 1×1, colocamos, sem sobreposições, sem deixar buracos e sem transpor o tabuleiro, peças como a seguinte:



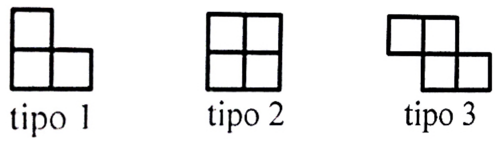
Observação: a peça pode ser girada. Cada peça cobre exatamente 3 casinhas.

(a) A partir de um tabuleiro vazio, qual o máximo de peças do tipo acima que podemos colocar?

(b) A partir do tabuleiro com as três peças posicionadas como mostra na figura abaixo, qual o número máximo de peças que podem ser colocadas no tabuleiro?



Problema 08. (**Olimpíada de Maio 2007**) Matias cobriu um tabuleiro 7×7, dividido em casinhas 1×1, com peças dos seguintes tipos:

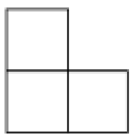


sen buracos, sobreposições e sem ultrapassar os limites do tabuleiro.

Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casinhas e cada peça do tipo 2 ou 3 cobre exatamente 4 casinhas.

Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter usado. (As pelas podem ser giradas e/ou espelhadas).

Problema 9. (**CMC 2020**) Considere um tabuleiro $n \times n$. A diagonal principal do tabuleiro contém n quadrados unitários que vão do canto superior esquerdo até o canto inferior direito. Nós temos uma quantidade ilimitada da seguinte peça:



As peças podem ser rotacionadas como quisermos. Nós queremos posicionar as peças de forma que cada uma cubra exatamente três quadrados unitários sem sobreposições, que nenhum quadradinho da diagonal principal seja coberto, e todos os outros quadrados unitários sejam cobertos exatamente uma vez. Para qual $n \geq 2$ isso é possível?