



Problema 1. Luiza, aprendendo dobraduras, depara-se com o seguinte problema matemático: seja uma folha de dimensões 40 cm x 30cm, marcada com quadriculados 10 cm x 10 cm, conforme apresentado da Figura A. Ao fazer as dobraduras 1, 2 e 3 pelas três linhas azuis apresentadas na Figura B de forma sequencial, obtém-se a dobradura nomeada de pseudo-barco. Dado isso, qual a área da figura plana formada pelo do pseudo-barco, ou seja, a área cinza da Figura C. Qual é a resposta desse problema matemático?

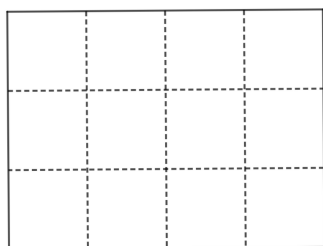


Figura A

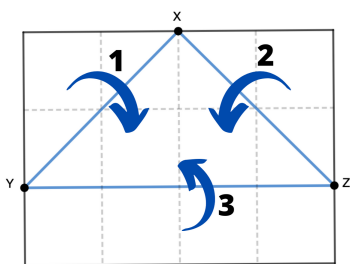


Figura B

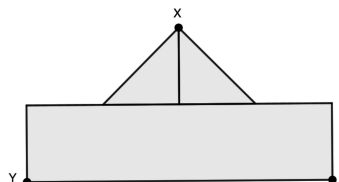


Figura C

- a) 600 cm² b) 700 cm² c) 400 cm² d) 500 cm² e) 800 cm²

Solução: O pseudo-barco tem uma parte formada por um retângulo e outra por um triângulo. Para calcular tais áreas, usaremos as medidas da folha quadriculada da Figura A.

Medidas do retângulo: 10cm de altura e 40cm de comprimento.

Área do retângulo: $10 \times 40 = 400 \text{ cm}^2$

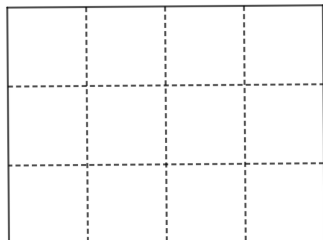


Figura A

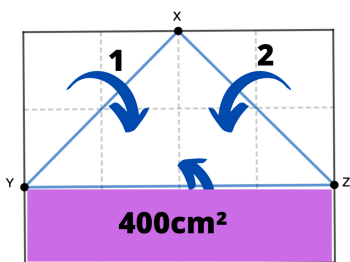


Figura B

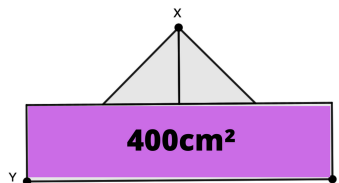


Figura C

Medidas do triângulo (vela do barco): 10cm de altura e 20 cm de base.

Área do triângulo: $\frac{(20 \times 10)}{2} = 100 \text{ cm}^2$

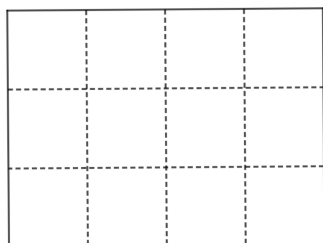


Figura A

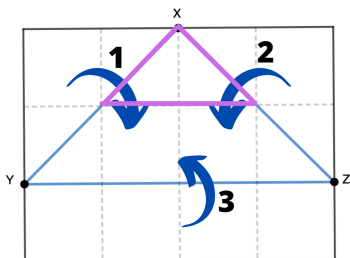


Figura B

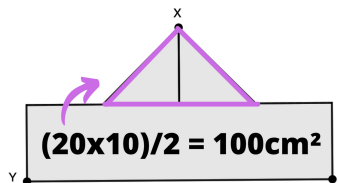


Figura C

Área cinza da Figura C: $400 + 100 = 500 \text{ cm}^2$

Resposta: 500cm²



Problema 2. Ana deseja montar um sanduíche delicioso usando duas fatias iguais de pão, duas fatias iguais de queijo e dois pedaços iguais de tomate. Sabendo que os ingredientes devem ser postos de modo que as fatias de pão estejam nos extremos, de quantas maneiras Ana pode montar seu sanduíche? Considere que duas montagens de sanduíches são iguais se ao virar um deles de cabeça pra baixo obtemos o outro.

- a) 2 b) 8 c) 24 d) 4 e) 6

Solução: Note que podemos distribuir, de cima para baixo, os 4 ingredientes, sendo 2 deles de cada tipo, de $\frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras. Algumas dessas maneiras são contadas duas vezes, exceto as $2! = 2$ maneiras simétricas, que são contadas uma vez. Portanto, o número de maneiras, considerando simetrias, é $\frac{6+2}{2} = 4$.

Resposta: 4

Problema 3. Luiza e Maria se conheceram em um evento matemático no dia 09/09/2021. Luiza, apaixonada por astrologia, pergunta para Maria sua data de aniversário, mas, como uma boa matemática, Maria responde que faltam 248 dias para o seu próximo aniversário. Sabendo que Maria fará 15 anos em seu próximo aniversário, quando Maria nasceu?

- a) 07/04/2007 b) 15/05/2007 c) 28/11/2006 d) 27/12/2006 e) 12/03/2007

Solução: Primeiro vamos descobrir qual a data do próximo aniversário de Maria. Sabemos que faltam, no dia do evento, $30 - 9 + 1 = 22$ dias para o fim do mês de setembro. Porém temos que o mês de:

- outubro/2021 tem: 31 dias (totalizando desde a data do evento: $22 + 31 = 53$ dias)
- novembro/2021 tem: 30 dias (totalizando desde a data do evento: $53 + 30 = 83$ dias)
- dezembro/2021 tem: 31 dias (totalizando desde a data do evento: $83 + 31 = 114$ dias)
- janeiro/2022 tem: 31 dias (totalizando desde a data do evento: $114 + 31 = 145$ dias)
- fevereiro/2022 tem: 28 dias, pois 2020 não é ano bissexto (totalizando desde a data do evento: $145 + 28 = 173$ dias)
- março/2022 tem: 31 dias, (totalizando desde a data do evento: $173 + 31 = 204$ dias)
- abril/2022 tem: 30 dias, (totalizando desde a data do evento: $204 + 30 = 234$ dias)

Dessa forma ao terminar o mês de abril/2022, ou seja, estar no dia 01/05/2022 ainda faltará $248 - 234 = 14$ dias para o aniversário de Maria. Logo a data do próximo aniversário de Maria é: 15/05/2022.

Porém sabemos que Maria fará 15 anos em seu próximo aniversário que é no ano de 2022, logo ela nasceu no ano de: $2022 - 15 = 2007$. Assim a data de seu nascimento foi: 15/05/2007

Resposta: 15/05/2007

Problema 4. Se, no TM² deste ano, Nelly fizer 18 questões das 25 possíveis, quantas questões consecutivas corretas, no mínimo, ela fará?

- a) 5 b) 3 c) 2 d) 6 e) 4

Solução: Nelly errou $25 - 18 = 7$ questões. Para saber o mínimo de questões consecutivas corretas, devemos "espalhar" as 7 questões entre as 25 possíveis.

Por exemplo, se ela tivesse acertado apenas 2 consecutivas, no máximo, então a prova dela teria, no máximo, 8 grupos de 2 questões certas intercaladas por 7 questões erradas, totalizando $2 \cdot 8 + 7 = 23$ questões. Desse modo, ela tem que ter, pelo menos, um grupo de 3 questões corretas.



Uma possível solução para 3 questões consecutivas corretas seria:

C C C E C C C E C C C E C C C E C C C E C C,

onde C são respostas certas e E são respostas erradas.

Outro modo é utilizar o Princípio das Casas dos Pombos. Como 18 questões certas e 7 questões erradas, veja quem $18 = 7 \cdot 2 + 4$. Então, temos pelo menos 1 bloco com 3 questões certas para cada errada. De fato, o exemplo mostra isso.

Resposta: 3

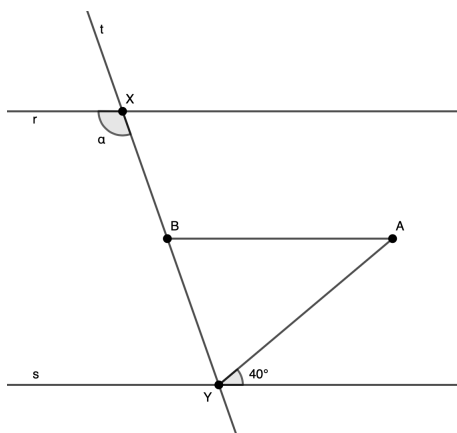
Problema 5. Kellem foi em uma loja de eletrônicos e comprou um celular de 2500 reais com 30% de desconto. Porém, com o esgotamento do produto na sua cidade, na semana seguinte, o celular daquela marca tinha aumentado 20% do seu valor original, sem desconto. Aproveitando a oportunidade, Kellem vendeu seu celular para sua prima pelo valor atual do mercado, mas ainda deu 10% de desconto. Quanto Kellem lucrou vendendo o celular?

- a) 900 reais b) 950 reais c) 1000 reais d) 750 reais e) 600 reais

Solução: Kellem comprou o celular por $0,7 \times 2500 = 1750$ reais (aplicando os 30% de desconto). Na semana seguinte, o celular estava valendo $1,2 \times 2500 = 3000$ reais (aplicando o aumento de 20%). Porém, ela deu um desconto de 10% para sua prima, logo o valor da venda foi $0,9 \times 3000 = 2700$ reais. Portanto, o lucro total de Kellem foi $2700 - 1750 = 950$ reais.

Resposta: 950 reais

Problema 6. Na figura abaixo, temos que as retas r e s são paralelas, e a reta t intersecta r e s nos pontos X e Y , respectivamente. Seja B um ponto na reta t e A um ponto tal que o segmento $\overline{BA}$ é paralelo à reta s , e $\overline{BA} = \overline{AY}$. Dado que o menor ângulo formado entre o segmento $\overline{AY}$ e a reta s é 40° , quanto vale o ângulo α , maior ângulo formado entre as retas t e r ?



- a) 120°
b) 100°
c) 140°
d) 105°
e) 110°

Solução: Como $\overline{AB}$ é paralelo a s , temos que $\angle BAY = 40^\circ$. Porém como $\overline{AB} = \overline{AY}$, temos que o triângulo AYB é isósceles, logo $\angle AYB = \angle YBA = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Assim como r é paralela a s , temos: $\alpha = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

Resposta: 110°



Problema 7. Sejam x e y inteiros positivos tais que $x + y = 28$. Qual o valor máximo da expressão $\frac{x}{13} + \frac{y}{15}$?

- a) $\frac{122}{65}$ b) 2 c) $\frac{414}{195}$ d) $\frac{418}{195}$ e) 3

Solução: Note que:

$$E = \frac{x}{13} + \frac{y}{15} = \frac{15x + 13y}{195} = \frac{2x + 13(x + y)}{195} = \frac{2x + 13 \cdot 28}{195} = \frac{2x + 364}{195}$$

Sabemos que E é máximo se x for máximo. Como x e y são inteiros positivos e $x + y = 28$, temos que $x = 27$ é o valor máximo que x pode assumir. Nesse caso, temos que:

$$E = \frac{2x + 364}{195} = \frac{2 \cdot 27 + 364}{195} = \frac{418}{195}$$

Resposta: $\frac{418}{195}$

Problema 8. Ana e Clara se revezam escrevendo números em um quadro, obedecendo a seguinte regra: se uma delas escreve o número n , a outra deve apagá-lo e escrever $n/3$, se n for múltiplo de 3, ou $4n + 5$, caso contrário. Após duas rodadas, o número 25 está no quadro. Qual é a soma dos possíveis valores para o primeiro número que foi escrito?

- a) 80 b) 240 c) 525 d) 775 e) 820

Solução: De fato, invertendo o processo, note que, para se obter o número 25, o número anterior pode ser 75 ($= 3 \cdot 25$) ou 5 ($= (25 - 5)/4$). Assim, seguindo o mesmo raciocínio, temos as possíveis seqüências de números que foram apagados do quadro, na ordem inversa:

- $25 \rightarrow 5 \rightarrow 15$;
- $25 \rightarrow 75 \rightarrow 225$;

Assim, os possíveis valores para o primeiro número escrito são 15, 225, que somam 240.

Resposta: 240

Problema 9. Beatriz tem em seu bolso 33 moedas, algumas de 25 centavos e outras de 10 centavos. Sabendo que Beatriz tem ao todo uma quantidade inteira de reais, quantas moedas de 25 centavos ela possui?

- a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) Impossível de determinar

Solução: Se Luíze tem x moedas de 25 centavos e $33 - x$ moedas de 10 centavos, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $25x + 10(33 - x) = 100k \Rightarrow 330 + 15x = 100k$. Assim, k deve ser múltiplo de 3, e como o lado esquerdo é positivo e maior do que 300, temos, obrigatoriamente, $k \geq 6$. No entanto, $330 + 15x \leq 330 + 15 \cdot 33 = 825$, o que implica $k < 9$. Logo, $k = 6$ e assim $x = \frac{600 - 330}{15} = 18$ moedas.

Resposta: 18

Problema 10. Zelda dispõe de três peças em forma de triângulo equilátero, cada uma delas com um desenho em uma de suas faces, conforme a Figura 1. Usando essas três peças, ela deseja montar uma Triforce, uma figura que consiste em um triângulo equilátero apontado para cima, usando as três peças com os desenhos de suas faces viradas para o mesmo lado e deixando um buraco na forma de triângulo equilátero no meio. A Figura 2 mostra um exemplo de Triforce (note que cada peça pode ser rotacionada, mas não pode ser virada).

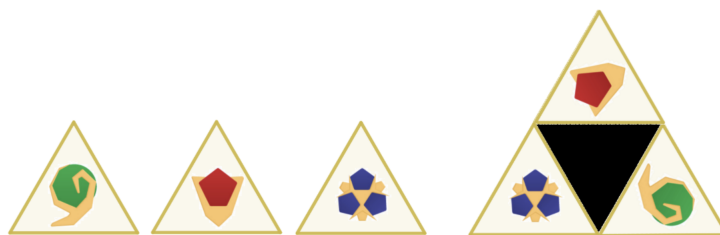


Figura 1

Figura 2

De quantas maneiras Zelda pode montar uma Triforce? Lembre-se de que duas maneiras são consideradas iguais se uma pode ser obtida através da outra por meio de rotação. Por exemplo, as três maneiras a seguir são iguais.



- a) 9 b) 18 c) 27 d) 36 e) 54

Solução: Para não termos problemas com rotações, coloque a peça azul na parte superior (podemos rotacionar a Triforce de modo que isso aconteça). A seguir, veja que há 2 maneiras de escolher em quais triângulos encaixar as duas peças restantes. Além disso, há 3 maneiras de escolher qual a rotação de cada peça restante, totalizando assim, pelo Princípio Multiplicativo, $2 \times 3 \times 3 = 18$ maneiras.

Resposta: 18

Problema 11. Professora Karol passou um desafio para suas alunas usando as letras das iniciais do Torneio Meninas na Matemática e Olimpíada Brasileira de Matemática. Ela escreveu a soma abaixo no quadro:

$$\begin{array}{r} T M M \\ + O B M \\ \hline B M O \end{array}$$

A professora explicou que cada letra representa um algarismo de 0 a 9 e que letras diferentes representam algarismos diferentes. Além disso, Karol disse que o algarismo representado pela letra M é par. Qual é o algarismo representado pela letra T?

- a) 2 b) 6 c) 8 d) 5 e) 9

Solução: Sabemos que $T + 0 = B$ e B está na unidade das centenas, logo $B \neq 0$. Além disso, como $B + M$ dá um número terminado também em M, e a soma das unidades $M + M$, como M é de 0 a 9, pode no máximo contribuir com 1 unidade na soma $B + M$, a única possibilidade de dar certo seria $B + M + 1 = M + 10$, pois terminaria em M, sendo assim $B = 9$. Portanto também temos que $M + M \geq 10$ e M é par, logo $M = 6$ ou 8 . Se $M = 6$, então $0 = 2$ e $1 + 0 + T = B = 9 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow M = T$, que é um absurdo. Logo $M = 8$, daí $0 = 6$ e $T = 2$.

Resposta: 2



Problema 12. Dada a equação abaixo, qual é o possível valor de x ?

$$x = 4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{\dots}}}}$$

- a) $\frac{9+\sqrt{6}}{2}$ b) 10 c) 7 d) $4\sqrt{3}$ e) 16

Solução: Como $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{\dots}}}}$, podemos substituí-lo em si mesmo da seguinte forma: $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{x}}}}$

Sendo assim temos, $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow x - 4 = 3 \cdot \sqrt{x}$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos: $(x - 4)^2 = 9x$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 9x$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 16x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 16) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 16.$$

Porém como $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{\dots}$, temos que $3 \cdot \sqrt{\dots} > 0 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x$ não pode ser igual a 1, logo temos $x = 16$.

Resposta: 16

Problema 13. Kellem e Luíze jogam *NumEscolhe!*. Luíze escolhe três algarismos distintos a , b e c entre 0 a 9 e dá, em sequência, dicas sobre cada um dos três números de três algarismos: abc , bca e cab . Então, se Luíze escolhe como algarismos 1, 2 e 3, os três números serão 123, 231 e 312. Com essas dicas, Kellem deve responder a soma dos três algarismos escolhidos por Luíze. Dadas que as dicas foram: abc é um múltiplo de 9, bca é um múltiplo de 11 e cab é um múltiplo de 5, qual deve ser a resposta de Kellem?

- a) 9 b) 11 c) 15 d) 18 e) 21

Solução: Sabemos que como cab é múltiplo de 5, pelo critério de divisibilidade por 5 temos que $b = 0$ ou $b = 5$. Logo dividindo em dois casos temos:

- Caso 1: $b = 0$

Logo de bca ser múltiplo de 11, temos ca múltiplo de 11 e então $c=a$, que gera um absurdo pois os três algarismos são distintos. Logo b é diferente de 0.

- Caso 2: $b = 5$

Logo de bca ser múltiplo de 11, temos que $5ca$ é múltiplo de 11, porém os números entre 500 e 599 múltiplos de 11 são:

506, 517, 528, 539, 550, 561, 572, 583, 594

Porém para abc ser múltiplo de 9 devemos ter $a+b+c$ múltiplo de 9, logo bca também será múltiplo de 9. Porém dentre os números acima o único múltiplo de 9 é: 594. Logo $a+b+c=4+5+9=18$

Resposta: 18



Problema 14. Sejam p e q números primos. Dado que $x = \frac{10p^3 + 147}{p^2q}$ é um número inteiro positivo, qual é o valor de $p + q$?

- a) 10 b) 25 c) 44 d) 80 e) 93

Solução: Para x ser um número inteiro positivo devemos ter que p^2q divide $10p^3 + 147$. Em particular temos que p^2 divide $10p^3 + 147$, porém como p^2 divide $10p^3$ temos que p^2 divide 147. Fatorando $147 = 3 \cdot 7^2$, logo como p é primo a única possibilidade para p é ser igual a 7.

Assim temos: $x = \frac{10 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2}{7^2q} = \frac{10 \cdot 7 + 3}{q} = \frac{73}{q}$. Dado que 73 é um número primo temos que $q = 73$. Logo $p + q = 7 + 73 = 80$

Resposta: 80

PROBLEMA ANULADO POR FALTA DE ITEM CORRESPONDENTE À RESPOSTA

Problema 15. Laís irá distribuir na escola 4 amoras e 6 bananas. Considere que todas as amoras são iguais e todas as bananas são iguais. Quantas possíveis seqüências de distribuições existem de modo que Laís acabe primeiro com a distribuição de amoras do que com a de bananas?

- a) 3628800 b) 84 c) 403200 d) 210 e) 10

Solução: Como Laís terminará primeiro com a distribuição de amora do que com a de bananas, temos que sua sequência de distribuição terminará com uma banana. Logo a Laís tem 4 amoras e 5 bananas para colocar em sequência já que a ultima fruta a ser distribuída será uma banana. Assim ela terá 9 frutas sendo 4 amoras iguais e 5 bananas iguais, logo: $\frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5!} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$

Resposta: 126

Problema 16. Algumas amigas foram a um rodízio de sushi e a conta deu 200 reais, que seria igualmente dividido entre todas. Porém, uma das amigas percebeu que havia esquecido a carteira em casa. Para solucionar o problema, cada uma das outras amigas pagou 10 reais a mais do que valor que pagariam inicialmente. Quantas amigas foram ao rodízio?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 8 e) 10

Solução: Seja X o número de amigas e Y a parte que cada uma originalmente pagaria, daí temos que:

$$X \cdot Y = 200 \text{ e } (X - 1) \cdot (Y + 10) = 200$$

$$\text{Assim: } Y = \frac{200}{X}$$

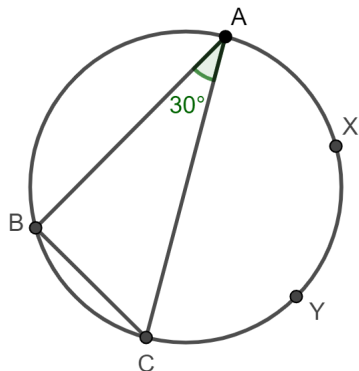
$$\Rightarrow (X - 1) \frac{(200 + 10X)}{X} = 200 \Rightarrow \frac{200 + 10X}{X} = \frac{200}{X - 1} \Rightarrow 200X + 10X^2 - 200 - 10X = 200X \Rightarrow 10X^2 - 10X - 200 =$$

$$0 \Rightarrow X^2 - X - 20 = 0 \Rightarrow X = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \Rightarrow X = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow X = 5 \text{ ou } -4. \text{ Como } X, \text{ o número de amigas deve ser um inteiro positivos, temos que } X = 5.$$

Resposta: 5



Problema 17. Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência tal que $\angle BAC = 30^\circ$, como mostra a figura abaixo. Seja X o ponto que pertence à circunferência tal que $\overline{XC} \parallel \overline{BA}$ (ou seja, que a reta $\overline{XC}$ é paralela à reta $\overline{BA}$). Existe um ponto Y na circunferência tal que $XA = XY = YC$. Determine o valor de $\angle B$.



- a) 75°
- b) 90°
- c) 100°
- d) 105°
- e) 120°

Solução: Como $\overline{XC} \parallel \overline{BA}$, temos que $\angle XCA = \angle BAC = 30^\circ$. Porém como $XA = XY = YC$, temos que $\angle ABX = \angle XBY = \angle YBC$. Sabemos também que $\angle XCA = \angle XBA$, logo: $\angle XBY = \angle YBC = \angle ABX = \angle XCA = 30^\circ$. Assim, $\angle B = \angle ABX + \angle XBY + \angle YBC = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$

Resposta: 90°

Problema 18. O número da casa de Clara é igual ao terceiro menor número inteiro positivo que possui a mesma quantidade de divisores de 2021. Qual é o número da casa de Clara?

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 15
- e) 27

Solução: Fatorando o número 2021, temos: $43 \cdot 47$, logo 2021 tem 4 divisores. Assim os números que tem 4 divisores são da forma: $p \cdot q$ ou p^3 , com p e q número primos distintos. Assim temos que os três primeiros números com uma dessas formas são: $2 \cdot 3 = 6$, $2^3 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$.

Resposta: 10

Problema 19. Dizemos que um inteiro positivo de 2 algarismos é peculiar se ele é igual ao quadrado do algarismo das unidades somado ao algarismo das dezenas. Quantos inteiros positivos de 2 algarismos peculiares existem?

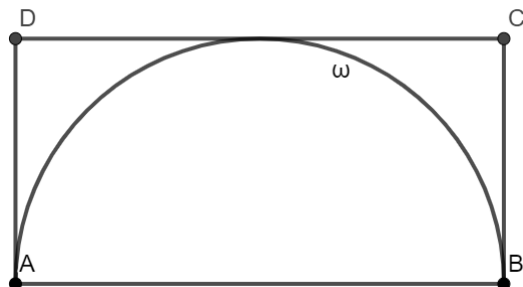
- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) Mais de 3

Solução: Sabemos que dados ab um inteiro positivo de 2 algarismos sendo a o algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades. Se ab é um número peculiar, temos que: $ab = a + b^2$. Assim, $10 \cdot a + b = a + b^2 \Rightarrow 9 \cdot a = (b - 1) \cdot b \Rightarrow 9$ divide b ou 9 divide $b - 1$. Assim $b = 9$ ou $b = 10$, como b é um algarismo temos $b = 9 \Rightarrow 9 \cdot a = (9 - 1) \cdot 9 \Rightarrow a = 8$. Logo $ab = 89$

Resposta: 1



Problema 20. Seja ω a semicircunferência da figura a seguir, que tangencia o lado $\widehat{CD}$ do retângulo ABCD. Dado que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ da semicircunferência mede 3π , qual o perímetro do retângulo ABCD?



a) 9

b) 18

c) 27

d) 3π

e) 9π

Solução: Sendo r o tamanho do raio da semicircunferência ω , temos que: $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = 3\pi \Rightarrow r = 3$. Porém sabemos que AB é diâmetro e que AD é igual ao raio da semicircunferência, logo: $AB + BC + CD + DA = 6 + 3 + 6 + 3 = 18$.

Resposta: 18

Problema 21. Seja n um número inteiro positivo tal que

$$\frac{n+9}{\sqrt{n-1}}$$

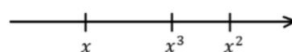
é um número inteiro. A soma de todos os possíveis valores de n é:

- a) 7 b) 31 c) 134 d) 225 e) Não é possível determinar.

Solução: De fato, primeiro observe que $\sqrt{n-1}$ é um número inteiro positivo, já que o numerador é um inteiro positivo, e a raiz quadrada de um inteiro positivo só pode ser inteira ou irracional. Assim, reescrevemos a fração dada como $\frac{n+9}{\sqrt{n-1}} = \frac{(\sqrt{n-1})^2 + 10}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1} + \frac{10}{\sqrt{n-1}}$, donde $\sqrt{n-1}$ é um divisor positivo de 10. Assim, $\sqrt{n-1} \in \{1, 2, 5, 10\}$, e com isso $n \in \{2, 5, 26, 101\}$, cuja soma é 134.

Resposta: 134

Problema 22. Suponha que x seja um número real e que x, x^2, x^3 estejam na reta real, de acordo com a figura a seguir (a reta indica o sentido positivo dos reais):



Então, podemos afirmar que

- a) $x > 1$ b) $1 > x > 0$ c) $0 > x > -1$ d) $-1 > x$
e) É impossível determinar com apenas os dados da questão.

Solução: Note que, se $x > 0$, então $x < x^2$ implica $0 < x < 1$, ou seja, $x < x^2 < x^3$, impossível pelo desenho. Logo, $x < 0$ (note que $x \neq 0$, pois x^2). Também, se tivermos $x < -1$, então $x < x^3$, donde $x^3 < x$, o que é impossível pelo desenho. Portanto, $x > -1$ (note que $x \neq -1$, pois x^3). Logo, $-1 < x < 0$.

Resposta: $0 > x > -1$



PROBLEMA ANULADO POR FALTA DE INFORMAÇÃO

Problema 23. Deborah e Gustavo brincam de *Moeda Cool!*. O jogo inicia-se com 2 moedas em uma mesa e em um número $N = 2$. Em cada jogada, o jogador da vez lança novamente todas as moedas sobre a mesa e realiza uma das seguintes operações:

- Se todas as moedas derem coroa, subtrai 1 do valor de N .
- Se todas as moedas derem cara, adiciona 1 do valor de N .
- Qualquer outra configuração, o jogo continua e não se altera o valor de N .

O jogo acaba quando $N = 1$. De quantas formas o jogo pode acabar em exatamente 4 jogadas?

- a) 4 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

Informação faltante: as duas moedas são diferentes.

Solução:

Primeiro, repara que ao jogar as moedas, as chances de cair cara (C) e coroa (K) são maiores. Isso pode acontecer de 2 formas (CK ou KC). Nos demais, há um único jeito de ocorrer duas caras (CC) e um único jeito de ocorrer duas coroas KK.

Vamos definir as seguintes jogadas que podem acontecer:

- A: adicionar 1 ao valor de N . Isso pode ocorrer de uma maneira.
- D: diminuir 1 ao valor de N . Isso pode ocorrer de uma maneira.
- E: não acontece com o valor de N , é o ato de esperar. Isso pode ocorrer de duas maneiras.

Observe que, na quarta jogada, tem que ocorrer D para o jogo terminar e N ser igual a 1, condição de término do jogo. Também, não podemos começar o jogo com D, porque assim o jogo já termina. Vamos dividir em casos:

- caso 1: não há nenhuma jogada do tipo A

Então, a única sequência de jogadas possível é EEED. Para cada jogada do tipo E, há duas maneiras de ocorrer. Logo, há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ maneiras de terminar em 4.

- caso 2: há uma jogada do tipo A

Ao adicionar 1 ao valor de N , serão necessárias 2 jogadas D para acabar o jogo, pois $3 - 2 = 1$. Queremos montar sequências do tipo:

_A_D_D

Logo, para a jogada E, há três possíveis lugares e, consequentemente, sequências. Cada uma dessas sequências possui 1A, 2D e 1E. Então, cada sequência pode ocorrer de $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ maneiras. Portanto, há $3 \cdot 2 = 6$ modos de terminar o jogo em 4 rodadas nesse caso.

- caso 3: há mais de uma jogada do tipo A

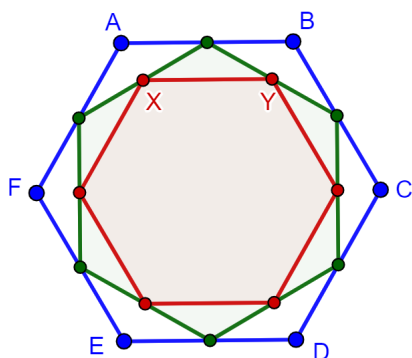
Ao realizar n vezes A, iremos precisar jogar $n + 1$ vezes D, pois $2 + (n) - (n + 1) = 1$. Como $n \geq 2$, temos no mínimo $2n + 1 \geq 5$ jogadas, absurdo. Logo, não podemos ter mais de uma jogada do tipo A.

Assim, a quantidade de maneiras é $8 + 6 = 14$.

Resposta: 14

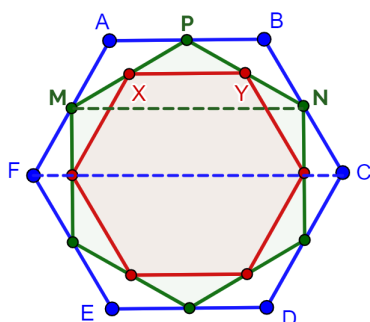


Problema 24. Ana brinca com hexágonos regulares. Primeiro, ela constrói o hexágono azul ABCDEF. Depois, ela toma o ponto médio de cada lado do hexágono azul e constrói o hexágono verde. Ela repete o procedimento: pega todos os pontos médios dos lados do hexágono verde e constrói o hexágono vermelho de lado $\overline{XY}$. Se $\overline{AB}$ mede 1, qual é o comprimento de $\overline{XY}$?



- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{3}{2}$
- e) $\frac{3}{4}$

Solução: Seja M, P e N os pontos médios dos segmentos FA, AB e BC, respectivamente, conforme apresentado na figura abaixo. Logo sabendo que a diagonal de um hexágono regular vale o dobro do lado, temos que $FC = 2$. Também sabemos que AB é paralelo ao segmento FC, pois o ângulo interno no hexágono regular vale 120° , logo $\angle FAB = \angle ABC = 120^\circ$ e por simetria, $\angle CFA = \angle FCB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, assim $\angle FAB + \angle CFA = \angle ABC + \angle FCB = 180^\circ$, fazendo do quadrilátero ABCF um trapézio isósceles. Desse modo temos que MN é base média do trapézio ABCF $\Rightarrow MN = \frac{AB + FC}{2} = \frac{3}{2}$.



Contudo, no triângulo PNM temos X e Y pontos médios dos lados PM e PN, respectivamente, logo XY é base média do triângulo e assim

$$XY = \frac{MN}{2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Resposta: $\frac{3}{4}$

Problema 25. Cinco cadeiras estão em fila. Para pintá-las, estão disponíveis as cores amarela, branca e azul. Mariana quer pintar todas as cadeiras, usando somente uma cor por cadeira, de modo que cadeiras vizinhas nunca sejam ambas amarelas. De quantas maneiras é possível fazer essa pintura?

OBS: não é preciso usar todas as cores disponíveis.

- a) 50
- b) 144
- c) 164
- d) 72
- e) 243

Solução: Sabemos que podem ter no máximo 3 cadeiras amarelas. Desse modo, vamos dividir em 4 casos:

- Caso 1: 0 cadeiras amarelas.

Logo cada cadeira é branca ou azul $\Rightarrow 2^5 = 32$ possibilidades.

- Caso 2: 1 cadeiras amarelas.

Logo devemos escolher uma cadeira para ser a amarela e o resto pode ser branca ou azul $\Rightarrow 5 \cdot 2^4 = 80$ possibilidades.



- Caso 3: 2 cadeiras amarelas.

Logo devemos escolher duas cadeiras não vizinhas para ser amarelas e o resto das cadeiras podem ser branca ou azul. Sabemos que o número de possibilidade de escolhas de duas cadeiras não adjacentes é igual a quantidade total do número de escolhas de duas cadeiras menos a quantidade de possibilidades de escolha de cadeiras adjacentes $\Rightarrow \binom{5}{2} - 4$. Logo teremos ao escolher as cores das outras 3 cadeiras $\Rightarrow (\binom{5}{2} - 4) \cdot 2^3 = (10 - 4) \cdot 8 = 48$ possibilidades.

- Caso 4: 3 cadeiras amarelas.

Logo teremos apenas uma possibilidade de escolha das cadeiras amarelas de modo que elas não sejam vizinhas, que é escolher as duas das pontas e a do meio. Assim nos basta escolher as cores das outras 2 cadeiras $\Rightarrow 2^2 = 4$ possibilidades.

Logo no total temos: $32 + 80 + 48 + 4 = 164$

Resposta: 164

