Problema 1. Luiza, aprendendo dobraduras, depara-se com o seguinte problema matemático: seja uma folha de dimensões 40 cm x 30 cm, marcada com quadriculados 10 cm x 10 cm, conforme apresentado da Figura A. Ao fazer as dobraduras 1, 2 e 3 pelas três linhas azuis apresentadas na Figura B de forma sequencial, obtém-se a dobradura nomeada de pseudo-barco. Dado isso, qual a área da figura plana formada pelo do pseudo-barco, ou seja, a área cinza da Figura C. Qual é a resposta desse problema matemático?

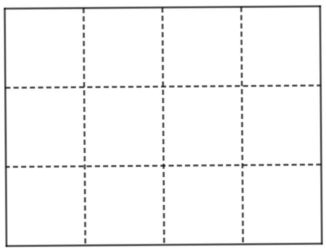


Figura A

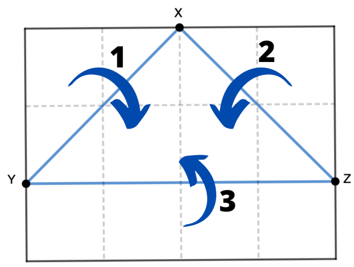


Figura B

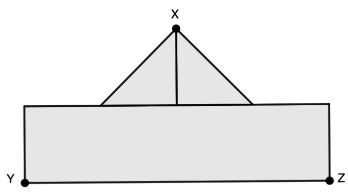


Figura C

a) 600 cm^2 b) 700 cm^2 c) 400 cm^2 d) 500 cm^2 e) 800 cm^2

Solução: O pseudo-barco tem uma parte formada por um retângulo e outra por um triângulo. Para calcular tais áreas, usaremos as medidas da folha quadriculada da Figura A.

Medidas do retângulo: 10 cm de altura e 40 cm de comprimento.
Área do retângulo: $10 \cdot 40 = 400$ cm^2

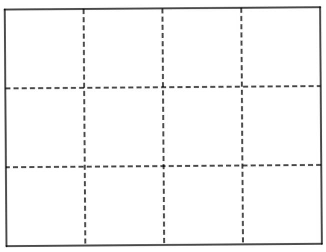


Figura A

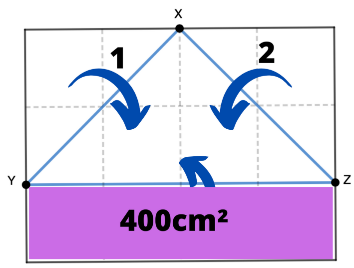


Figura B

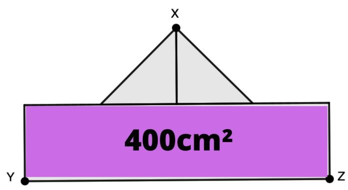


Figura C

Medidas do triângulo (vela do barco): 10 cm de altura e 20 cm de base.
Área do triângulo: $\dfrac{(20 \cdot 10)}{2} = 100$ cm^2

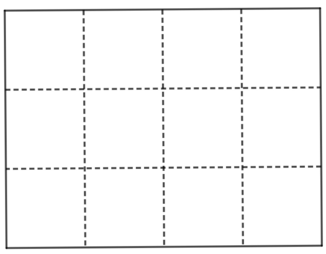


Figura A

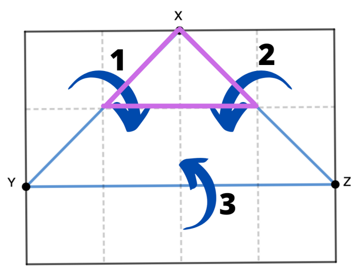


Figura B

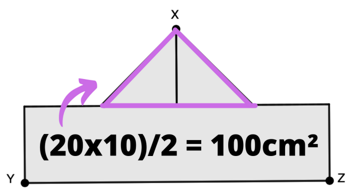


Figura C

Área cinza da Figura C: $400 + 100 = 500$ cm^2
Resposta: 500 **cm^2**

Problema 2. Ana e Clara se revezam escrevendo números em um quadro, obedecendo a seguinte regra: se uma delas escreve o número n, a outra deve apagá-lo e escrever $n/3$, se n for múltiplo de 3, ou $4n + 5$, caso contrário. Após duas rodadas, o número 25 está no quadro. Qual a soma dos possíveis valores para o primeiro número que foi escrito?

a) 80 b) 240 c) 525 d) 775 e) 820

Solução: De fato, invertendo o processo, note que, para se obter o número 25, o número anterior pode ser 75 $(= 3 \cdot 25)$ ou 5 $(= (25 - 5)/4)$. Assim, seguindo o mesmo raciocínio, temos as possíveis sequências de números que foram apagados do quadro, na ordem inversa:

- $25 \to 5 \to 15$;
- $25 \to 75 \to 225$;

Assim, os possíveis valores para o primeiro número escrito são 15, 225, que somam 240.

Resposta: 240

Problema 3. Se, no TM^2 deste ano, Nelly fizer 18 questões das 25 possíveis, quantas questões consecutivas corretas, no mínimo, ela fará?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Solução: Nelly errou $25 - 18 = 7$ questões. Para saber o mínimo de questões consecutivas corretas, devemos "espalhar"as 7 questões entre as 25 possíveis.

Por exemplo, se ela tivesse acertado apenas 2 consecutivas, no máximo, então a prova dela teria, no máximo, 8 grupos de 2 questões certas intercaladas por 7 questões erradas, totalizando $2 \cdot 8 + 7 = 23$ questões.

Desse modo, ela tem que ter, pelo menos, um grupo de 3 questões corretas.

Uma possível solução para 3 questões consecutivas corretas seria:
C C C E C C C E C C C E C C C E C C C E C E C E C,
onde C são respostas certas e E são respostas erradas.

Outro modo é utilizar o Princípio das Casas dos Pombos. Como 18 questão certas e 7 questões erradas, veja quem $18 = 7 \cdot 2 + 4$. Então, temos pelo menos 1 bloco com 3 questões certas para cada errada. De fato, o exemplo mostra isso.
Resposta: 3

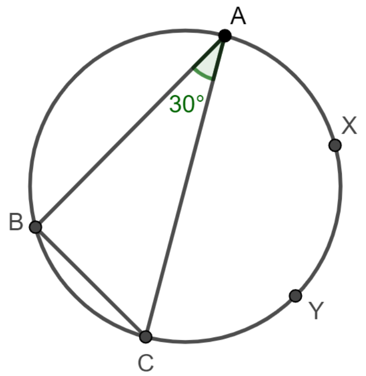
Problema 4. Ana deseja montar um sanduíche delicioso usando fatias iguais de pão, duas folhas iguais de alface, duas fatias iguais de queijo e dois pedaços iguais de tomate. Sabendo que os ingredientes devem ser postos de modo que as fatias de pão estejam nos extremos, de quantas maneiras Ana pode montar seu sanduíche? Considere que duas montagens de sanduíche são iguais se ao virar um deles de cabeça para baixo obtemos o outro.

a) 48 b) 90 c) 96 d) 180 e) 720

Solução: Note que podemos distribuir, de cima para baixo, os 6 ingredientes, sendo 2 deles de cada tipo, de $\dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$ maneiras. Algumas dessas maneiras são contadas duas vezes, exceto as $3! = 6$ maneiras simétricas, que são contadas uma vez. Portanto, o número de maneiras, considerando simetrias, é $\dfrac{90 + 6}{2} = 48$.

Resposta: 48

Problema 5. Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência tal que $\angle BAC = 30°$, como mostra a figura abaixo. Seja X o ponto que pertence a circunferência tal que $\overline{XC} // \overline{AB}$ (ou seja, que a reta $\overline{XC}$ é paralela à reta $\overline{AB}$). Existe um ponto Y na circunferência tal que $\widehat{XA} = \widehat{XY} = \widehat{YC}$. Determine o valor de $\angle B$.



a) $75°$

b) $90°$

c) $100°$

d) $105°$

e) $120°$

Resposta: 48

Solução: Como $\overline{XC} // \overline{BA}$, temos que $\angle XCA = \angle BAC = 30°$. Porém, como $\widehat{XA} = \widehat{XY} = \widehat{YC}$, temos que $\angle ABX = \angle XBY = \angle YBC$. Sabemos também que $\angle XCA = \angle XBA$, logo: $\angle XBY = \angle YBC = \angle ABX = \angle XCA = 30°$. Assim, $\angle B = \angle ABX + \angle XBY + \angle YBC = 3 \cdot 30° = 90°$

Resposta: $90°$

Problema 6. Algumas amigas foram a um rodízio de sushi e a conta deu 200 reais, que seria igualmente dividida entre todas. Porém, uma das amigas percebeu que havia esquecido a carteira em casa. Para solucionar o problema, cada uma das outras amigas pagou 10 reais a mais do que valor que pagariam inicialmente. Quantas amigas foram ao rodízio?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 8 e) 10

Solução: Seja X o número de amigas e Y a parte que cada uma originalmente pagaria, daí temos que:

$X \cdot Y = 200$ e $(X-1) \cdot (Y+10) = 200$

Assim: $Y = \dfrac{200}{X}$

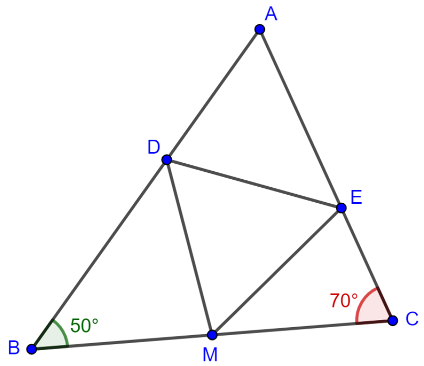
$$\Rightarrow (X-1)\frac{(200+10X)}{X} = 200 \Rightarrow \frac{200+10X}{X} = \frac{200}{X-1} \Rightarrow 200X + 10X^2 - 200 - 10X = 200X$$

$$\Rightarrow 10X^2 - 10X - 200 = 0 \Rightarrow X^2 - X - 20 = 0 \Rightarrow X = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} \Rightarrow X = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow X = 5 \text{ ou } -4.$$

Como X, o número de amigas deve ser um inteiro positivos, temos que $X = 5$.

Resposta: 5

Problema 7. ABC é um triângulo tal que $\angle ABC = 50°$ e $\angle ACB = 70°$. Seja M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e o ponto D e E são pontos tais que $\overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$. Qual o valor de $\angle DEC$.



a) $100°$

b) $110°$

c) $120°$

d) $130°$

e) $140°$

Solução: Há duas soluções:

Solução 1:

Como M é ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{MC} = \overline{MC} = \overline{MD} = \overline{ME}$. Logo, M é o centro de uma circunferência que passa por B, C, D e E. Então, quadrilátero BCDE é cíclico. Portanto, $\angle DEC = 180° - \angle ABC = 180° - 50° = 130°$.

Solução 2:

Das condições do problema, $\triangle BMD$ é isósceles de base $\overline{BD}$, $\triangle CME$ é isósceles de base $\overline{CE}$ e $\triangle DME$ é isósceles de base $\overline{DE}$. Queremos calcular $\angle DEC = \angle DEM + \angle CEM$.

Primeiro, $\angle DEM = \dfrac{180° - \angle DME}{2}$. Vamos calcular $\angle DME$. Olhando para o $\triangle BMD$, temos que $\angle BMD = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$. Agora, olhando para o $\triangle CME$, temos que $\angle CME = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$. Logo, $\angle DME = 180° - \angle BMD - \angle CME = 180° - 80° - 40° = 60°$. Logo, $\angle DEM = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Além disso, $\angle CEM = \angle ECM = 70°$.

Portanto, $\angle DEC = 60° + 70° = 130°$.

Resposta: $130°$

Problema 8. Sejam x e y inteiros positivos tais que $x + y = 28$. Qual é o valor máximo da expressão $\dfrac{x}{13} + \dfrac{y}{15}$?

a) $\dfrac{122}{65}$ b) 2 c) $\dfrac{414}{195}$ d) $\dfrac{418}{195}$ e) 3

Solução: Note que:

$$E = \frac{x}{13} + \frac{y}{15} = \frac{15x + 13y}{195} = \frac{2x + 13(x + y)}{195} = \frac{2x + 13.28}{195} = \frac{2x + 364}{195}$$

Sabemos que E é máximo se x for máximo. Como x e y são inteiros positivos e $x + y = 28$, temos que $x = 27$ é o valor máximo que x pode assumir. Nesse caso, temos que:

$$E = \frac{2x + 364}{195} = \frac{2 \cdot 27 + 364}{195} = \frac{418}{195}$$

Resposta: $\dfrac{418}{195}$

Problema 9. O número da casa de Gustavo é igual à soma dos três menores números inteiros positivos que possui a mesma quantidade de divisores de 2021. Qual o número da casa dele?

a) 24 b) 30 c) 31 d) 36 e) 56

Solução: Fatorando o número 2021, temos: $43 \cdot 47$, logo 2021 tem 4 divisores. Assim os números que tem 4 divisores são da forma: $p \cdot q$ ou p^3, com p e q número primos distintos. Dessa forma, temos que os três primeiros números com uma dessas formas são: $2 \cdot 3 = 6$, $2^3 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$.

Resposta: 24

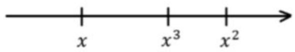
Problema 10. Luíze tem em seu bolso 33 moedas, algumas de 25 centavos e outras de 10 centavos. Sabendo que Luíze tem ao todo uma quantidade inteira de reais, quantas moedas de 25 centavos ela possui?

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) Não é possível determinar.

Solução: Se Luíze tem x moedas de 25 centavos e $33 - x$ moedas de 10 centavos, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $25x + 1033 - x = 100k \Rightarrow 330 + 15x = 100k$. Assim, k deve ser múltiplo de 3, e como o lado esquerdo é positivo e maior do que 300, temos, obrigatoriamente, $k \geq 6$. No entanto, $330 + 15x \leq 330 + 15.33 = 825$, o que implica $k < 9$. Logo, $k = 6$ e assim $x = \dfrac{600 - 330}{15} = 18$ moedas.

Resposta: 18

Problema 11. Suponha que x seja um número real e que x, x^2, x^3 estejam na reta real, de acordo com a figura a seguir (a reta indica o sentido positivo dos reais):



Então, podemos afirmar que:

a) $x > 1$ b) $1 > x > 0$ c) $0 > x > -1$ d) $-1 > x$
e) É impossível determinar com apenas os dados da questão.

Solução: Note que, se $x > 0$, então $x < x^2$ implica $0 < x < 1$, ou seja, $x < x^2 < x^3$, impossível pelo desenho. Logo, $x < 0$ (note que $x \neq 0$, pois x^2). Também, se tivermos $x < -1$, então $x < x^3$, donde $x^3 < x$, o que é impossível pelo desenho. Portanto, $x > -1$ (note que $x \neq -1$, pois x^3). Logo, $-1 < x < 0$.

Resposta: $0 > x > -1$

Problema 12. Zelda dispõe de três peças em forma de triângulo equilátero, cada uma delas com um desenho em uma de suas faces, conforme a Figura 1. Usando essas três peças, ela deseja montar uma Triforce, uma figura que consiste em um triângulo equilátero apontado para cima, usando as três peças com os desenhos de suas faces viradas para o mesmo lado e deixando um buraco na forma de triângulo equilátero no meio. A Figura 2 mostra um exemplo de Triforce (note que cada peça pode ser rotacionada, mas não pode ser virada).

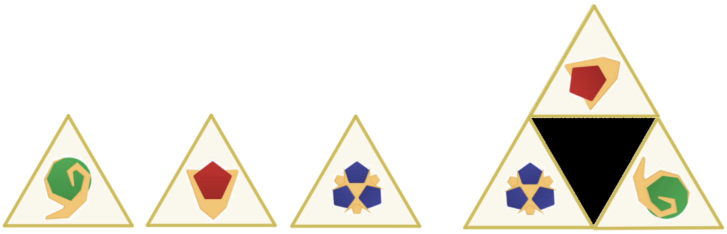


Figura 1 Figura 2

De quantas maneiras Zelda pode montar uma Triforce? Lembre-se de que duas maneiras são consideradas iguais se uma pode ser obtida através da outra por meio de rotação. Por exemplo, as três maneiras a seguir são iguais.

a) 9 b) 18 c) 27 d) 36 e) 54

Solução: Para não termos problemas com rotações, coloque a peça azul na parte superior (podemos rotacionar a Triforce de modo que isso aconteça). A seguir, veja que há 2 maneiras de escolher em quais triângulos encaixar as duas peças restantes. Além disso, há 3 maneiras de escolher qual a rotação de cada peça restante, totalizando assim, pelo Princípio Multiplicativo, 2×3×3=18 maneiras.

Resposta: 18

Problema 13. Professora Karol passou um desafio para suas alunas usando as letras das iniciais do Torneio Meninas na Matemática e Olimpíada Brasileira de Matemática. Ela escreveu a soma abaixo no quadro:

$$\begin{array}{r} \mathsf{T\ M\ M} \\ +\ \mathsf{O\ B\ M} \\ \hline \mathsf{B\ M\ O} \end{array}$$

A professora explicou que cada letra representa um algarismo de 0 a 9 e que letras diferentes representam algarismos diferentes. Além disso, Karol disse que o algarismo representado pela letra M é par. Qual é o algarismo representado pela letra T?

a) 2 b) 6 c) 8 d) 5 e) 9

Solução: Sabemos que $T + O = B$ e B está na unidade das centenas, logo $B \neq 0$. Além disso, como $B + M$ dá um número terminado também em M, e a soma das unidades $M + M$, como M é de 0 a 9, pode no máximo contribuir com 1 unidade na soma $B + M$, a única possibilidade de dar certo seria $B + M + 1 = M + 10$, pois terminaria em M, sendo assim $B = 9$. Portanto também temos que $M + M >= 10$ e M é par, logo $M = 6$ou 8. Se $M = 6$, então $O = 2$ e $1 + O + T = B = 9 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow M = T$, que é um absurdo. Logo $M = 8$, daí $O = 6$ e $T = 2$

Resposta: 2

Problema 14. Kellem e Luíze jogam *NumEscolhe!*. Luíze escolhe três algarismo distintos a, b e c entre 0 a 9 e dá, em sequência, dicas sobre cada um dos três números de três algarismos: abc, bca e cab. Então, se Luíze escolhe como algarismos 1, 2 e 3, os três números serão 123, 231 e 312. Com essa dicas, Kellem deve responder a soma dos três algarismos escolhidos por Luíze. Dadas que as dicas foram: abc é um múltiplo de 9, bca é um múltiplo de 11 e cab é um múltiplo de 5, qual deve ser a resposta de Kellem?

a) 9 b) 11 c) 15 d) 18 e) 21

Solução: Sabemos que como cab é múltiplo de 5, pelo critério de divisibilidade por 5 temos que b = 0 ou b = 5. Logo dividindo em dois casos temos:

- Caso 1: b = 0

  Logo de bca ser múltiplo de 11, temos ca múltiplo de 11 e então c=a, que gera um absurdo pois os três algarismos são distintos. Logo b é diferente de 0.

- Caso 2: b = 5

  Logo de bca ser múltiplo de 11, temos que 5ca é múltiplo de 11, porém os número entre 500 e 599 múltiplos de 11 são:

  506, 517, 528, 539, 550, 561, 572, 583, 594

  Porém para abc ser múltiplo de 9 devemos ter a+b+c múltiplo de 9, logo bca também será múltiplo de 9. Porém dentre os números acima o único múltiplo de 9 é: 594. Logo a+b+c=4+5+9=18

Resposta: 18

PROBLEMA ANULADO POR FALTA DE INFORMAÇÃO NO ENUNCIADO

Problema 15. Deborah e Gustavo brincam de *Moeda Cool!*. O jogo inicia-se com 2 moedas em uma mesa e em um número $N = 2$. Em cada jogada, o jogador da vez lança novamente todas as moedas sobre a mesa e realiza uma das seguinte operações:

- Se todas as moedas derem coroa, subtrai 1 do valor de N.
- Se todas as moedas derem cara, adiciona 1 do valor de N.
- Qualquer outra configuração, o jogo continua e não se altera o valor de N.

O jogo acaba quando $N = 1$. De quantas formas o jogo pode acabar em exatamente 5 jogadas?

a) 6 b) 12 c) 25 d) 30 e) 50

Informação faltante: as duas moedas são diferentes.

Solução: Primeiro, repara que ao jogar as moedas, as chances de cair cara (C) e coroa (K) são maiores. Isso pode acontecer de 2 formas (CK ou KC). Nos demais, há um único jeito de ocorrer duas caras (CC) eum único jeito de ocorrer duas coroas KK.

Vamos definir as seguintes jogadas que podem acontecer:

- A: adicionar 1 ao valor de N. Isso pode ocorrer de uma maneira.
- D: diminuir 1 ao valor de N. Isso pode ocorrer de uma maneira.
- E: não acontece com o valor de N, é o ato de esperar. Isso pode ocorrer de duas maneiras.

Observe que, na quinta jogada, tem que ocorrer D para o jogo terminar e N ser igual a 1, condição de término do jogo. Também, não podemos começar o jogo com D, porque assim o jogo já termina. Vamos pensar nas sequências com A, D e E que satisfazem o enunciado. Repare que ao termos n vezes A, temos que ter $(n+1)$ vezes D. Então, realizamos $2n+1$ jogadas. Como queremos terminar com 5 rodadas, podemos concluir que a quantidade de E deve ser par e menor que 5.

- caso 1: 4 jogadas do tipo E

  Então, a única sequências de jogadas possível é EEEED. Para cada jogada do tipo E, há duas maneiras de ocorrer. Logo, há $2^5 \cdot 1 = 16$ maneiras de terminar em 5 jogadas.

- caso 2: 2 jogadas do tipo E

  Então, há uma jogada do tipo A, totalizando 1A, 2D e 2E.

  Queremos montar sequências do tipo:

  $$\_A\_D\_D$$

  Se as duas jogadas E são seguidas, há três possíveis lugares e, consequentemente, sequências.

  Se as duas jogadas E não são seguidas, há $\binom{3}{2} = 3$ sequências desse tipo.

  Logo, há $3+3=6$ sequências satisfazendo o jogo. Cada uma dessas sequências possui 1A, 2D e 2E. Então, cada sequência pode ocorrer de $1 \cdot 2^2 = 4$ maneiras. Portanto, há $6 \cdot 4 = 24$ modos de terminar o jogo em 5 rodadas nesse caso.

- caso 3: não há jogada do tipo E

  Então, há dois jogadas do tipo A e três jogadas do tipo D.. Observa que a cada momento antes do final, não podemos ter mais D na sequência do que A, pois se tiver o jogo acaba antes de 5 rodadas.

  $$A\_A\_D$$

  Assim, as possíveis sequências são:

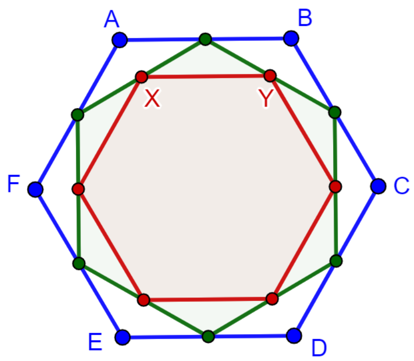
  $$ADADD$$
  $$AADDD$$

  Logo, há 2 sequências satisfazendo o jogo. Cada uma dessas sequências possui não possui nenhum E. Então, cada sequência pode ocorrer de 1 maneira. Portanto, há $2 \cdot 1 = 2$ modos de terminar o jogo em 5 rodadas nesse caso.

Assim, a quantidade de maneiras é $16+24+2=42$.

Resposta: 42

Problema 16. Ana brinca com hexágonos regulares. Primeiro, ela constrói o hexágono azul $ABCDEF$. Depois, ela toma o ponto médio de cada lado do hexágono azul e constrói o hexágono verde. Ela repete o procedimento: pega todos os pontos médios dos lados do hexágono verde e constrói o hexágono vermelho de lado $\overline{XY}$. Se $\overline{AB}$ mede 1, qual é o comprimento de $\overline{XY}$?



a) $\frac{1}{2}$

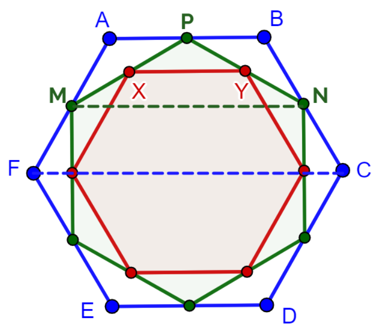
b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{3}{4}$

Solução: Seja M, P e N os pontos médios dos segmentos FA, AB e BC, respectivamente, conforme apresentado na figura abaixo. Logo sabendo que a diagonal de um hexágono regular vale o dobro do lado, temos que $FC = 2$. Também sabemos que AB é paralelo ao segmento FC, pois o ângulo interno no hexágono regular vale 120°, logo $\angle FAB = \angle ABC = 120°$ e por simetria, $\angle CFA = \angle FCB = \frac{120°}{2} = 60°$, assim $\angle FAB + \angle CFA = \angle ABC + \angle FCB = 180°$, fazendo do quadrilátero $ABCF$ um trapézio isósceles. Desse modo temos que MN é base média do trapézio $ABCF \Rightarrow MN = \dfrac{AB + FC}{2} = \dfrac{3}{2}$.



Contudo, no triângulo PNM temos X e Y pontos médios dos lados PM e PN, respectivamente, logo XY é base média do triângulo e assim

$$XY = \frac{MN}{2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Resposta: $\frac{3}{4}$

Problema 17. Dada a equação abaixo, qual é o valor de x?

$$x = 4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{\dots}}}}$$

a) $\frac{9+\sqrt{6}}{2}$ b) 10 c) 7 d) $4\sqrt{3}$ e) 16

Solução: Como $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{\dots}}}}$, podemos substituí-lo em si mesmo da seguinte forma: $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{\left(4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{\dots}}}\right)} = 4 + 3 \cdot \sqrt{x}$

Sendo assim temos, $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow x - 4 = 3 \cdot \sqrt{x}$

Elevando amos os lados da equação ao quadrado, temos: $(x - 4)^2 = 3^2 \cdot x$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 9x$$
$$\Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 16x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)(x-16) = 0$$
$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 16.$$

Porém como $x = 4 + 3 \cdot \sqrt{\ldots}$, temos que $3 \cdot \sqrt{\ldots} > 0 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x$ não pode ser igual a 1, logo temos $x = 16$.

Resposta: 16

PROBLEMA ANULADO POR FALTA DE ITEM CORRESPONDENTE À RESPOSTA

Problema 18. Laís irá distribuir na escola a amoras e b bananas. Considere que todas as amoras são iguais e todas as bananas são iguais. Quantas possíveis sequências de distribuições existem de modo que Laís acabe primeiro com a distribuição de amoras do que com a de bananas?

a) $(a+b)!$ b) $\binom{a+b-1}{b}$ c) $(a+b-1)!$ d) $\binom{a+b}{b}$ e) $a+b$

Solução: Como Laís terminará primeiro com a distribuição de amora do que com a de bananas, temos que sua sequência de distribuição terminará com uma banana. Logo a Laís tem a amoras e $b-1$ bananas para colocar em sequência já que a ultima fruta a ser distribuída será uma banana. Assim ela terá $(a+b-1)$ frutas sendo a amoras iguais e $b-1$ bananas iguais, logo: $\dfrac{(a+b-1)!}{a! \cdot (b-1)!} = \binom{a+b-1}{a}$

Resposta: $\binom{a+b-1}{a}$

Problema 19. Sejam p e q números primos. Dado que $x = \dfrac{10p^3+147}{p^2q}$ é um número inteiro positivo, qual é o valor de $p+q$?

a) 10 b) 25 c) 44 d) 80 e) 93

Solução: Para x ser um número inteiro positivo devemos ter que p^2q divide $10p^3+147$. Em particular temos que p^2 divide $10p^3+147$, porém como p^2 divide $10p^3$ temos que p^2 divide 147. Fatorando $147 = 3 \cdot 7^2$, logo como p é primo a única possibilidade para p é ser igual a 7.

Assim temos: $x = \dfrac{10 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2}{7^2 q} = \dfrac{10 \cdot 7 + 3}{q} = \dfrac{73}{q}$. Dado que 73 é um número primo temos que $q = 73$. Logo $p + q = 7 + 73 = 80$

Resposta: 80

Problema 20. Qual é o valor de X que satisfaz a seguinte equação?

$$2^{2^{2021}} + 2^{2^{1012}} + 2^{(2^{1010}+1)^2} = X^2$$

a) $2^{2^{2022}}$ b) $2^{2^{2020}} + 2^{2^{2019}}$ c) $2^{2^{2020}} + 2^{2^{1011}}$ d) $2^{2^{2019}}$ e) $2^{2^{2021}} + 2^{2^{1010}}$

Solução: Sabemos que: $(2^{1010}+1)^2 = (2^{1010})^2 + 2 \cdot 2^{1010} + 1 = 2^{2020} + 2^{1011} + 1$

Assim $2^{(2^{1010}+1)^2} = 2^{(2^{2020}+2^{1011}+1)} = 2^{2^{2020}} \cdot 2^{2^{1011}} \cdot 2^1$.

Logo $\boxed{2^{(2^{1010}+1)^2} = 2 \cdot 2^{2^{2020}} \cdot 2^{2^{1011}}}$(1)

Porém sabemos que: $2^{2^{2021}} = 2^{(2^{2020} \cdot 2)} = (2^{2^{2020}})^2$. Da mesma forma: $2^{2^{1012}} = 2^{(2^{1011} \cdot 2)} = (2^{2^{1011}})^2$.

Então $\boxed{2^{2^{2021}} = (2^{2^{2020}})^2}$(2) e $\boxed{2^{2^{1012}} = (2^{2^{1011}})^2}$(3).

Assim substituindo (1), (2) e (3) na equação inicial, temos:

$$(2^{2^{2020}})^2 + (2^{2^{1011}})^2 + 2 \cdot 2^{2^{2020}} \cdot 2^{2^{1011}} = X^2$$
$$\Rightarrow (2^{2^{2020}} + 2^{2^{1011}})^2 = X^2$$
$$\Rightarrow \boxed{X = 2^{2^{2020}} + 2^{2^{1011}}}$$

Resposta: $2^{2^{2020}} + 2^{2^{1011}}$

Problema 21. Seja n um número inteiro positivo tal que

$$\frac{n+9}{\sqrt{n-1}}$$

é um número inteiro. A soma de todos os possíveis valores de n é:

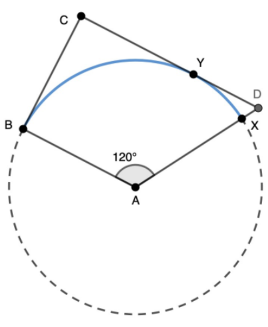
a) 7 b) 31 c) 134 d) 225 e) Não é possível determinar.

Solução: De fato, primeiro observe que $\sqrt{n-1}$ é um número inteiro positivo, já que o numerador é um inteiro positivo, e a raiz quadrada de um inteiro positivo só pode ser inteira ou irracional. Assim, reescrevemos a fração dada como $\dfrac{n+9}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{(\sqrt{n-1})^2+10}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1} + \dfrac{10}{\sqrt{n-1}}$, donde $\sqrt{n-1}$ é um divisor positivo de 10. Assim, $\sqrt{n-1} \in \{1, 2, 5, 10\}$, e com isso $n \in \{2, 5, 26, 101\}$, cuja soma é 134.

Resposta: 134

PROBLEMA ANULADO POR FALTA DE INFORMAÇÃO NO ENUNCIADO

Problema 22. Na figura abaixo, temos que $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ tangenciam a circunferência. O comprimento do arco menor $\widehat{BX}$ vale 2π. Dado que $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{BA}$, qual é o perímetro do quadrilátero $ABCD$?



a) 12

b) $6 + 2\sqrt{3}$

c) $3 + \sqrt{3}$

d) 8

e) $9 + 3\sqrt{3}$

Informação faltante: o ponto A é o centro da circunferência apresentada na figura.

Solução: Como o arco menor $\widehat{BX}$ vale 2π e o ângulo central correspondente vale $120°$, temos que o comprimento de toda a circunferência é igual a: $\dfrac{360°}{120°} \cdot 2\pi = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$. Porém sabemos que sendo r o tamanho do raio da circunferência, temos que: $2\pi r = 6\pi \Rightarrow \boxed{r = 3}$

Como BC e CD tangenciam a circunferência, temos que $AB \perp BC$ e $AY \perp CD$. Logo como CD é paralelo a BA, temos que: $\angle ABC = \angle BCY = \angle CYA = \angle YAB = 90°$. E assim, como $AB = AY = r = 3$ temos que $BACY$ é um quadrado de lado r.

Pelos resultados apresentados anteriormente temos que o triângulo AYD forma um triângulo retângulo em Y e temos: $\angle BAD = \angle BAY + \angle YAD \Rightarrow \angle YAD = 120° - 90° = 30°$. Assim, $\text{tg}(\angle YAD) = \frac{YD}{YA} \Rightarrow YD = \text{tg}(30°) \cdot YA \Rightarrow YD = \sqrt{3}/3 \cdot r = \sqrt{3}/3 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{YD = \sqrt{3}}$.

Também sabemos que: $\cos(\angle YAD) = \frac{YA}{AD} \Rightarrow AD = \frac{YA}{\cos(30°)} \Rightarrow AD = \frac{r}{\sqrt{3}/2} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{AD = 2\sqrt{3}}$.

Assim $AB + BC + CD + DA = AB + BC + CY + YD + DA = 3 + 3 + 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3}$

Resposta: $9 + 3\sqrt{3}$

Problema 23. Qual é a quantidade de subconjuntos do conjunto $M = \{2, 4, 8, \ldots, 2^{2021}\}$ que possuem uma quantidade par de elementos?
OBS: o conjunto vazio possui 0 *elementos e, portanto, possui uma quantidade par de elementos.*

a) 1 b) 2^{2019} c) 2^{2020} d) 2^{2021} e) 2^{2022}

Solução: Note que o conjunto M possui 2021 elementos. Note que cada subconjunto X de M possui seu complementar $M–X$ de forma que: se X possui x elementos, $M–X$ possui $(2021–x)$ elementos. Em todo caso, se X possui uma quantidade par de elementos, $M–X$ possui uma quantidade impar e se X possui uma quantidade impar de elementos, $M–X$ possui uma quantidade par. Dessa forma, basta saber de quantas formas podemos particionar o conjunto M em subconjuntos X e $M–X$. Note que para cada subconjunto X de M, temos exatamente um complemento e, portanto, fazer tal partição é análogo a pegar todos os subconjuntos de X e dividi-los em pares (X e $M–X$). Logo, o conjunto M possui 2^{2021} subconjuntos e exatamente a metade deles: 2^{2020} possui uma quantidade par de elementos.

Resposta: 2^{2020}

Problema 24. Cinco cadeiras estão em fila. Para pintá-las, estão disponíveis as cores azul, branca e rosa. Grazielly quer pintar todas as cadeiras, usando somente uma cor por cadeira, de modo que cadeiras vizinhas nunca sejam ambas azuis. De quantas maneiras é possível fazer essa pintura?
OBS: não é preciso usar todas as cores disponíveis.

a) 50 b) 144 c) 164 d) 72 e) 243

Solução: Sabemos que podem ter no máximo 3 cadeiras amarelas. Desse modo, vamos dividir em 4 casos:

- Caso 1: 0 cadeiras amarelas.

  Logo cada cadeira é branca ou azul $\Rightarrow 2^5 = 32$ possibilidades.

- Caso 2: 1 cadeiras amarelas.

  Logo devemos escolher uma cadeira para ser a amarela e o resto pode ser branca ou azul $\Rightarrow 5 \cdot 2^4 = 80$ possibilidades.

- Caso 3: 2 cadeiras amarelas.

  Logo devemos escolher duas cadeiras não vizinhas para ser amarelas e o resto das cadeiras podem ser branca ou azul. Sabemos que o número de possibilidade de escolhas de duas cadeiras não adjacentes é igual a quantidade total do número de escolhas de duas cadeiras menos a quantidade de possibilidades de escolha de cadeiras adjacentes $\Rightarrow \binom{5}{2} - 4$. Logo teremos ao escolher as cores das outras 3 cadeiras $\Rightarrow (\binom{5}{2} - 4) \cdot 2^3 = (10 - 4) \cdot 8 = 48$ possibilidades.

- Caso 4: 3 cadeiras amarelas.

  Logo teremos apenas uma possibilidade de escolha das cadeiras amarelas de modo que elas não sejam vizinhas, que é escolher as duas das pontas e a do meio. Assim nos basta escolher as cores das outras 2 cadeiras $\Rightarrow 2^2 = 4$ possibilidades.

Logo no total temos: $32 + 80 + 48 + 4 = 164$

Resposta: 164

Problema 25. Clara quer saber a quantidade de soluções inteiras com $x > y$ tem para a seguinte equação:

$$8x^2 - 12xy + 4y^2 = 24$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Sabemos que: $8x^2 - 12xy + 4y^2 = 24 \Rightarrow 9x^2 - 12xy + 4y^2 - x^2 = 24$

$$\Rightarrow (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 - x^2 = 24$$
$$\Rightarrow (3x - 2y)^2 - x^2 = 24$$
$$\Rightarrow (3x - 2y - x)(3x - 2y + x) = 24$$
$$\Rightarrow (2x - 2y)(4x - 2y) = 24$$
$$\Rightarrow 2(x - y)2(2x - y) = 24$$
$$\Rightarrow (x - y)(2x - y) = 6 = 2 \cdot 3$$

Logo como $x > y$, temos que $(x - y) > 0$, assim $(2x - y)$ também deve ser maior que 0. Dessa forma temos 4 possibilidades:

- Caso 1: $(x - y) = 1$ e $(2x - y) = 6$, logo $\boxed{x = 5}$ e $\boxed{y = 4}$
- Caso 2: $(x - y) = 6$ e $(2x - y) = 1$, logo $\boxed{x = -5}$ e $\boxed{y = -11}$
- Caso 3: $(x - y) = 2$ e $(2x - y) = 3$, logo $\boxed{x = 1}$ e $\boxed{y = -1}$
- Caso 4: $(x - y) = 3$ e $(2x - y) = 2$, logo $\boxed{x = -1}$ e $\boxed{y = -4}$

Resposta: 4
