INSTRUÇÕES:

- Leia atentamente as perguntas.
- Cada questão tem uma única resposta correta.
- A prova tem 25 questões, todas com mesmo valor.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- A prova começará às 14h do horário de Brasília e terminará às 17h do horário de Brasília.
- A prova terá 3 horas de prova, incluindo envio do gabarito.
- Organize-se para preencher o gabarito.

Problema 1. Luiza, aprendendo dobraduras, depara-se com o seguinte problema matemático: seja uma folha de dimensões 40 cm x 30 cm, marcada com quadriculados 10 cm x 10 cm, conforme apresentado da Figura A. Ao fazer as dobraduras 1, 2 e 3 pelas três linhas azuis apresentadas na Figura B de forma sequencial, obtém-se a dobradura nomeada de pseudo-barco. Dado isso, qual a área da figura plana formada pelo do pseudo-barco, ou seja, a área cinza da Figura C. Qual é a resposta desse problema matemático?

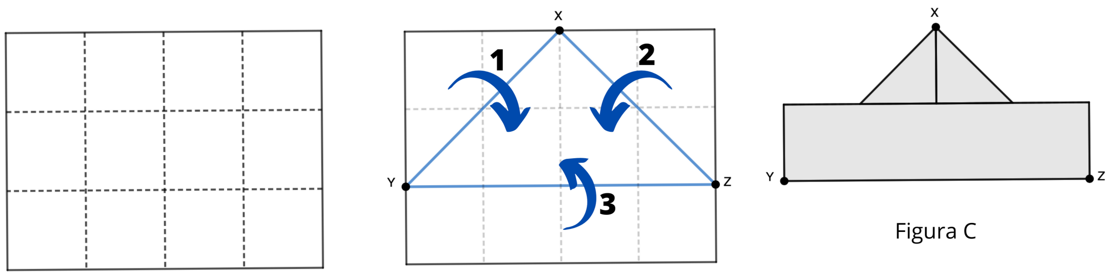


Figura A Figura B Figura C

a) 600 cm^2 b) 700 cm^2 c) 400 cm^2 d) 500 cm^2 e) 800 cm^2

Problema 2. Ana e Clara se revezam escrevendo números em um quadro, obedecendo a seguinte regra: se uma delas escreve o número n, a outra deve apagá-lo e escrever $n/3$, se n for múltiplo de 3, ou $4n + 5$, caso contrário. Após duas rodadas, o número 25 está no quadro. Qual a soma dos possíveis valores para o primeiro número que foi escrito?

a) 80 b) 240 c) 525 d) 775 e) 820

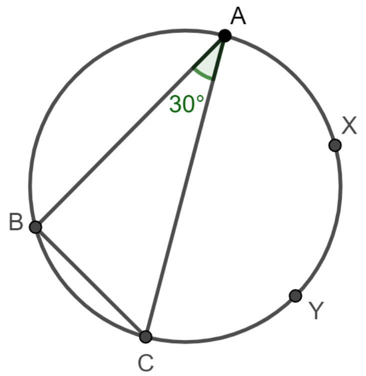
Problema 3. Se, no TM^2 deste ano, Nelly fizer 18 questões das 25 possíveis, quantas questões consecutivas corretas, no mínimo, ela fará?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Problema 4. Ana deseja montar um sanduíche delicioso usando fatias iguais de pão, duas folhas iguais de alface, duas fatias iguais de queijo e dois pedaços iguais de tomate. Sabendo que os ingredientes devem ser postos de modo que as fatias de pão estejam nos extremos, de quantas maneiras Ana pode montar seu sanduíche? Considere que duas montagens de sanduíche são iguais se ao virar um deles de cabeça para baixo obtemos o outro.

a) 48 b) 90 c) 96 d) 180 e) 720

Problema 5. Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência tal que $\angle BAC = 30°$, como mostra a figura abaixo. Seja X o ponto que pertence a circunferência tal que $\overline{XC}//\overline{AB}$ (ou seja, que a reta $\overline{XC}$ é paralela à reta $\overline{AB}$). Existe um ponto Y na circunferência tal que $\widehat{XA} = \widehat{XY} = \widehat{YC}$. Determine o valor de $\angle B$.



a) 75°

b) 90°

c) 100°

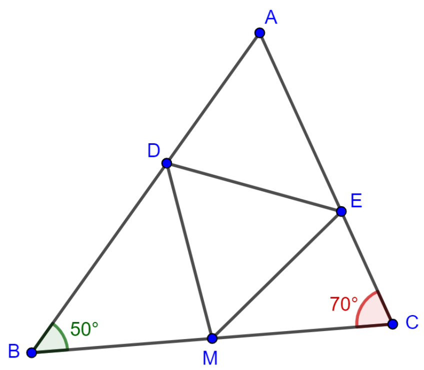
d) 105°

e) 120°

Problema 6. Algumas amigas foram a um rodízio de sushi e a conta deu 200 reais, que seria igualmente dividida entre todas. Porém, uma das amigas percebeu que havia esquecido a carteira em casa. Para solucionar o problema, cada uma das outras amigas pagou 10 reais a mais do que valor que pagariam inicialmente. Quantas amigas foram ao rodízio?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 8 e) 10

Problema 7. ABC é um triângulo tal que $\angle ABC = 50°$ e $\angle ACB = 70°$. Seja M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e o ponto D e E são pontos tais que $\overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$. Qual o valor de $\angle DEC$.



a) 100°

b) 110°

c) 120°

d) 130°

e) 140°

Problema 8. Sejam x e y inteiros positivos tais que $x + y = 28$. Qual é o valor máximo da expressão $\frac{x}{13} + \frac{y}{15}$?

a) $\frac{122}{65}$ b) 2 c) $\frac{414}{195}$ d) $\frac{418}{195}$ e) 3

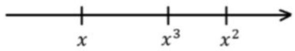
Problema 9. O número da casa de Gustavo é igual à soma dos três menores números inteiros positivos que possui a mesma quantidade de divisores de 2021. Qual o número da casa dele?

a) 24 b) 30 c) 31 d) 36 e) 56

Problema 10. Luíze tem em seu bolso 33 moedas, algumas de 25 centavos e outras de 10 centavos. Sabendo que Luíze tem ao todo uma quantidade inteira de reais, quantas moedas de 25 centavos ela possui?

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) Não é possível determinar.

Problema 11. Suponha que x seja um número real e que x, x^2, x^3 estejam na reta real, de acordo com a figura a seguir (a reta indica o sentido positivo dos reais):



Então, podemos afirmar que:

a) $x > 1$ b) $1 > x > 0$ c) $0 > x > -1$ d) $-1 > x$
e) É impossível determinar com apenas os dados da questão.

Problema 12. Zelda dispõe de três peças em forma de triângulo equilátero, cada uma delas com um desenho em uma de suas faces, conforme a Figura 1. Usando essas três peças, ela deseja montar uma Triforce, uma figura que consiste em um triângulo equilátero apontado para cima, usando as três peças com os desenhos de suas faces viradas para o mesmo lado e deixando um buraco na forma de triângulo equilátero no meio. A Figura 2 mostra um exemplo de Triforce (note que cada peça pode ser rotacionada, mas não pode ser virada).

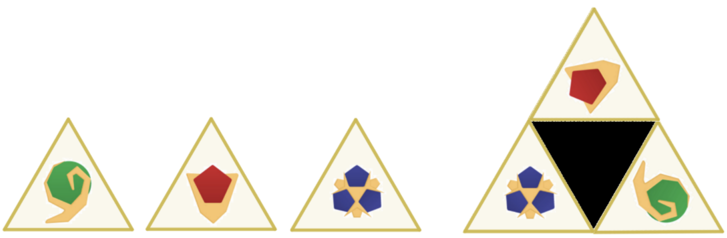


Figura 1 Figura 2

De quantas maneiras Zelda pode montar uma Triforce? Lembre-se de que duas maneiras são consideradas iguais se uma pode ser obtida através da outra por meio de rotação. Por exemplo, as três maneiras a seguir são iguais.

a) 9 b) 18 c) 27 d) 36 e) 54

Problema 13. Professora Karol passou um desafio para suas alunas usando as letras das iniciais do Torneio Meninas na Matemática e Olimpíada Brasileira de Matemática. Ela escreveu a soma abaixo no quadro:

$$\begin{array}{r} \mathrm{T\,M\,M} \\ +\ \mathrm{O\,B\,M} \\ \hline \mathrm{B\,M\,O} \end{array}$$

A professora explicou que cada letra representa um algarismo de 0 a 9 e que letras diferentes representam algarismos diferentes. Além disso, Karol disse que o algarismo representado pela letra M é par. Qual é o algarismo representado pela letra T?

a) 2 b) 6 c) 8 d) 5 e) 9

Problema 14. Kellem e Luíze jogam *NumEscolhe!*. Luíze escolhe três algarismo distintos a, b e c entre 0 a 9 e dá, em sequência, dicas sobre cada um dos três números de três algarismos: abc, bca e cab. Então, se Luíze escolhe como algarismos 1, 2 e 3, os três números serão 123, 231 e 312. Com essa dicas, Kellem deve responder a soma dos três algarismos escolhidos por Luíze. Dadas que as dicas foram: abc é um múltiplo de 9, bca é um múltiplo de 11 e cab é um múltiplo de 5, qual deve ser a resposta de Kellem?

a) 9 b) 11 c) 15 d) 18 e) 21

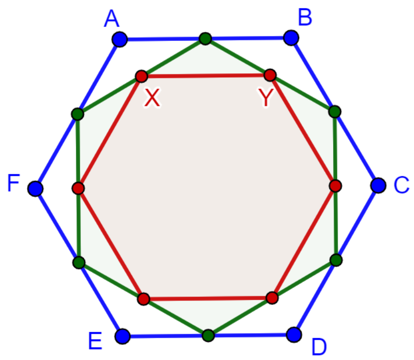
Problema 15. Deborah e Gustavo brincam de *Moeda Cool!*. O jogo inicia-se com 2 moedas em uma mesa e em um número $N = 2$. Em cada jogada, o jogador da vez lança novamente todas as moedas sobre a mesa e realiza uma das seguinte operações:

- Se todas as moedas derem coroa, subtrai 1 do valor de N.
- Se todas as moedas derem cara, adiciona 1 do valor de N.
- Qualquer outra configuração, o jogo continua e não se altera o valor de N.

O jogo acaba quando $N = 1$. De quantas formas o jogo pode acabar em exatamente 5 jogadas?

a) 6 b) 12 c) 25 d) 30 e) 50

Problema 16. Ana brinca com hexágonos regulares. Primeiro, ela constrói o hexágono azul $ABCDEF$. Depois, ela toma o ponto médio de cada lado do hexágono azul e constrói o hexágono verde. Ela repete o procedimento: pega todos os pontos médios dos lados do hexágono verde e constrói o hexágono vermelho de lado $\overline{XY}$. Se $\overline{AB}$ mede 1, qual é o comprimento de $\overline{XY}$?



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{3}{4}$

Problema 17. Dada a equação abaixo, qual é o valor de x?

$$x = 4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{4 + 3 \cdot \sqrt{\ldots}}}}$$

a) $\frac{9+\sqrt{6}}{2}$ b) 10 c) 7 d) $4\sqrt{3}$ e) 16

Problema 18. Laís irá distribuir na escola a amoras e b bananas. Considere que todas as amoras são iguais e todas as bananas são iguais. Quantas possíveis sequências de distribuições existem de modo que Laís acabe primeiro com a distribuição de amoras do que com a de bananas?

a) $(a+b)!$ b) $\binom{a+b-1}{b}$ c) $(a+b-1)!$ d) $\binom{a+b}{b}$ e) $a+b$

Problema 19. Sejam p e q números primos. Dado que $x = \dfrac{10p^3+147}{p^2q}$ é um número inteiro positivo, qual é o valor de $p+q$?

a) 10 b) 25 c) 44 d) 80 e) 93

Problema 20. Qual é o valor de X que satisfaz a seguinte equação?

$$2^{2^{2021}} + 2^{2^{1012}} + 2^{(2^{1010}+1)^2} = X^2$$

a) $2^{2^{2022}}$ b) $2^{2^{2020}} + 2^{2^{2019}}$ c) $2^{2^{2020}} + 2^{2^{1011}}$ d) $2^{2^{2019}}$ e) $2^{2^{2021}} + 2^{2^{1010}}$

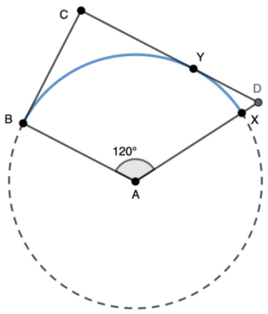
Problema 21. Seja n um número inteiro positivo tal que

$$\frac{n+9}{\sqrt{n-1}}$$

é um número inteiro. A soma de todos os possíveis valores de n é:

a) 7 b) 31 c) 134 d) 225 e) Não é possível determinar.

Problema 22. Na figura abaixo, temos que $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ tangenciam a circunferência. O comprimento do arco menor $\widehat{BX}$ vale 2π. Dado que $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{BA}$, qual é o perímetro do quadrilátero $ABCD$?



a) 12

b) $6+2\sqrt{3}$

c) $3+\sqrt{3}$

d) 8

e) $9+3\sqrt{3}$

Problema 23. Qual é a quantidade de subconjuntos do conjunto $M = \{2, 4, 8, \ldots, 2^{2021}\}$ que possuem uma quantidade par de elementos?
OBS: o conjunto vazio possui 0 elementos e, portanto, possui uma quantidade par de elementos.

a) 1 b) 2^{2019} c) 2^{2020} d) 2^{2021} e) 2^{2022}

Problema 24. Cinco cadeiras estão em fila. Para pintá-las, estão disponíveis as cores azul, branca e rosa. Grazielly quer pintar todas as cadeiras, usando somente uma cor por cadeira, de modo que cadeiras vizinhas nunca sejam ambas azuis. De quantas maneiras é possível fazer essa pintura?
OBS: não é preciso usar todas as cores disponíveis.

a) 50 b) 144 c) 164 d) 72 e) 243

Problema 25. Clara quer saber a quantidade de soluções inteiras com $x > y$ tem para a seguinte equação:

$$8x^2 - 12xy + 4y^2 = 24$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4