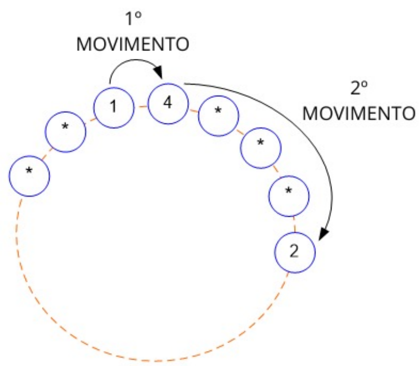
PAGMO 2021

1st Pan-American Girls' Mathematical Olympiad

4 de outubro de 2021

1. São dadas $n \geq 2$ fichas, numeradas de 1 a n. As fichas são colocadas em um círculo, não necessariamente em ordem. Inicia-se com a ficha de número 1. A cada turno, se estamos na ficha de número i, pulamos para a ficha que está i posições à frente em sentido horário. Por exemplo, observe a seguinte figura:



Determine todos os valores de n para os quais é possível ordenar as fichas no círculo, de modo que todas serão visitadas durante o processo.

2. Considere o triângulo isósceles ABC com $\angle BAC = 90°$. Seja ℓ a reta que passa pelo ponto B e pelo ponto médio de AC. Seja Γ a circunferência de diâmetro AB. A reta ℓ e a circunferência Γ se intersectam no ponto P, diferente de B. Mostre que a circunferência que passa pelos pontos A, C e P é tangente à reta BC em C.

3. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que a igualdade:

$$f(x + yf(x + y)) + xf(x) = f(xf(x + y + 1)) + y^2$$

é satisfeita para todos os números reais x, y.

Nota: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma associação tal que cada número real z é associado a um único número real, denotado por $f(z)$. Por exemplo, $f(z) = z^2+1$ é uma função que associa 1 a $f(1) = 1^2+1 = 2$, e associa -2 a $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até 23:59 UTC.