

Problema 4. Lúcia multiplica vários números de um dígito (possivelmente com repetições) e obtém um inteiro n que é maior do que 10. Em seguida, ela multiplica todos os dígitos de n , obtendo um número ímpar. Determine todos os valores possíveis do dígito das unidades de n .

Observação: O dígito das unidades de um número é o dígito que está mais à direita. Por exemplo, o dígito das unidades de 2021 é 1.

Problema 5. Celeste tem um número ilimitado de cada um dos n tipos diferentes de doces, rotulados de tipo 1, tipo 2, \dots , tipo n . Inicialmente, ela toma $m > 0$ doces e os enfileira em uma mesa. Então, ela repetidamente escolhe uma das seguintes operações e a executa (nem sempre ela tem as duas opções):

1. Ela come um doce do tipo k e, no lugar dele, ela coloca dois doces: um doce do tipo $k - 1$ seguido de um doce do tipo $k + 1$. Considere o tipo $n + 1$ como o mesmo que o tipo 1 e o tipo 0 como o mesmo que o tipo n .
2. Ela escolhe dois doces do mesmo tipo que estão em posições consecutivas e os come.

Determine todos os inteiros positivos n para os quais Celeste consegue deixar a mesa vazia (nenhum doce na mesa) depois de realizar uma quantidade finita das duas operações acima, independente do valor de m e da configuração inicial de doces na mesa.

Problema 6. Seja ABC um triângulo com incentro I e seja Γ o excírculo oposto ao vértice A . Suponha que Γ é tangente às retas BC , AC e AB nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Suponha que as retas IA_1 , IB_1 e IC_1 intersectam Γ novamente nos pontos A_2 , B_2 e C_2 , respectivamente. Seja M o ponto médio do segmento AA_1 . Se as retas A_1B_1 e A_2B_2 se intersectam em X e as retas A_1C_1 e A_2C_2 se intersectam em Y , demonstre que $MX = MY$.

Notas:

- O incentro do triângulo ABC é o centro da circunferência que é tangente aos segmentos AB , AC e BC .
- O excírculo do triângulo ABC oposto ao vértice A é a circunferência que é tangente ao segmento BC , ao prolongamento do segmento AB mais distante de B , e ao prolongamento do segmento AC mais distante de C .

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até 23:59 UTC.