



PROVA 2º FASE
2 DE DEZEMBRO 2021



INSTRUÇÕES:

- Leia atentamente as perguntas.
- A prova tem 4 questões discursivas, todas com mesmo valor.
- Resolva apenas uma questão por folha. O rascunho poderá ser entregue, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- Escreva seu código individual em cada folha que usar, ele é essencial para sua identificação.
- Escreva somente em um dos lados de cada folha.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- A prova começará às 14h do horário de Brasília e terminará às 18h30min do horário de Brasília.
- A prova terá, no máximo, 4 horas e 30 minutos de duração.
- Haverá 30 minutos após o término da prova para escanear suas soluções e enviá-las.
- Link para submissão das soluções: <https://www.dropbox.com/request/gZgFCrCTTjSARszfsUav>.

Problema 1. Sejam a, b, c números reais positivos tais que:

$$ab - c = 3$$

$$abc = 18$$

Calcule o valor numérico de $\frac{ab}{c}$.

Problema 2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que $\angle ACB = 40^\circ$ e $\angle BAC = 60^\circ$. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que $CD = \frac{AB}{2}$ e seja M o ponto médio do segmento AC . Quanto mede o ângulo $\angle CMD$ em graus?

Problema 3. Um número natural é chamado *caótilgal* se ele e seu sucessor possuem, ambos, a soma dos seus algarismos divisível por 2021. Quantos algarismos tem o menor número *caótilgal*?

Problema 4. Mariana brinca com um tabuleiro 8×8 com todas as suas casas em branco. Ela diz que duas casas são vizinhas se elas possuem um lado ou um vértice em comum, ou seja, duas casas podem ser vizinhas verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente. A brincadeira consiste em preencher as 64 casas do tabuleiro, uma após a outra, cada uma com um número de acordo com a seguinte regra: ela escolhe sempre uma casa em branco e a preenche com o número inteiro igual à quantidade de casas vizinhas desta que ainda estejam em branco. Feito isso, a casa não é mais considerada em branco.

Demonstre que o valor da soma de todos os 64 números escritos no tabuleiro ao final da brincadeira não depende da ordem do preenchimento. Além disso, calcule o valor dessa soma.

Observação: Uma casa não é vizinha a si mesma.