Problema 1. Sejam a, b, c números reais positivos tais que:

$$ab - c = 3 \text{ (I)}$$

$$abc = 18 \text{ (II)}$$

Calcule o valor numérico de $\frac{ab}{c}$.

(proposto por Ana Karoline Borges)

Solução 1. Multiplique (I) por c. Temos:

$$abc - c^2 = 3c$$

Substituindo $abc = 18$, temos a equação de segundo grau:

$$c^2 + 3c - 18 = 0$$

Por Fórmula de Bhaskara ou fatoração,

$$(c + 6) \cdot (c - 3) = 0$$

Logo, $c = -6$ ou $c = 3$. Porém, $c = -6$ é uma contradição, pois $c > 0$. Portanto, $\frac{ab}{c} = \frac{abc}{c^2} = \frac{18}{9} = 2$.

Solução 2. Alternativamente, de modo equivalente, podemos escrever $c = ab - 3$. Então:

$$ab(ab - 3) = 18$$

Expandindo e considerando $x = ab$, temos a seguinte equação de segundo grau.

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

Por Fórmula de Bhaskara ou fatoração,

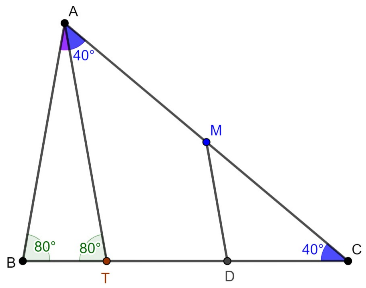
$$(x - 6) \cdot (x + 3) = 0$$

Logo, $x = 6$ ou $x = -3$. Porém, $x = -3$ é uma contradição, pois $x = ab > 0$. Assim, $ab = 6$ e $c = \frac{18}{ab} = \frac{18}{6} = 3$. Portanto, $\frac{ab}{c} = \frac{6}{3} = 2$.

Problema 2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que $\angle ACB = 40°$ e $\angle BAC = 60°$. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que $CD = \dfrac{AB}{2}$ e seja M o ponto médio do segmento AC. Quanto mede o ângulo $\angle CMD$ em graus?

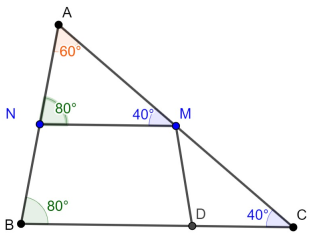
(proposto por Rodrigo Ribeiro)

Solução Oficial.

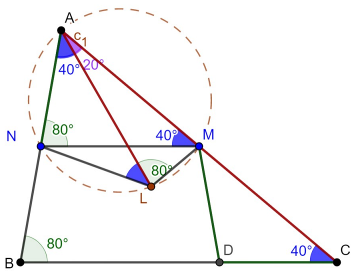


Defina T em BC tal que $AB{=}AT$. Pelo $\triangle ABT$ isósceles, temos que $\angle BAT = \dfrac{180° - 2 \cdot 80°}{2} = 20°$. Então, temos que olhando o $\angle BAC$, $\angle TAC = 40°$. Logo, $\triangle ATC$ isósceles, o que implica $TC = AB$. Isso implica que D é ponto médio de CT. Assim, MD é base média do $\triangle ATC$ e, pelo paralelismo de $AT \parallel MD$, temos que $\angle CMD = \angle CAT = 40°$.

As duas próximas soluções utilizam a ideia de construir um triângulo congruente a $\triangle DCM$, usando o lado AB ou o lado AC. Vamos definir N como ponto médio de AB. Observe que MN é base média do $\triangle ABC$ e, então, de $MN \parallel BC$, temos $\angle ABC = \angle ANM = 80°$ e $\angle ACB = \angle AMN = 40°$.

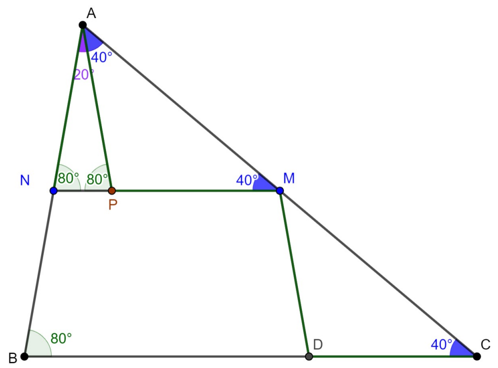


Solução 2.



Construa o ponto L tal que $\triangle DCM$ é congruente a $\triangle NAL$. Podemos definir L tal que $\angle NAL = 40°$ e $AL = CM$. Veja que $\angle LAM = 20°$. Como M é ponto médio de AC, $\triangle ALM$ é isósceles de base LM. Logo, $\angle ALM = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$. Como $\angle ALM = \angle ANM$ estão olhando sobre o arco AM, o quadrilátero $ANLM$ e cíclico. Da congruência de triângulos construída pelo ponto L, $\angle ALN = \angle CMD$. Porém, $\angle ALN = \angle AMN = 40°$ pelo quadrilátero cíclico. Logo, $\angle CMD = 40°$.

Solução 3.



Considere ponto P na base média MN tal que $\angle BAP = 20^\circ$. Veja que esse ponto é construído de forma que $\triangle NAP$ é isósceles, pois $\angle ANM = \angle ABC = 80^\circ$ e $\angle APM = 180^\circ - \angle ANM - \angle BAP = 80^\circ$. Portanto, pelo caso LAL, $\triangle APM \cong \triangle CDM$, pois $AP = AN = CD$, $\angle PAM = \angle DCM = 40^\circ$ por construção do ponto P e $AM = CM$ por M ponto médio de AB. Porém, $\angle DMC = \angle PMA = \angle MCD$, pois $MN \parallel BC$. Logo, $\angle CMD = 40^\circ$.

Problema 3. Um número natural é chamado *caótigal* se ele e seu sucessor possuem, ambos, a soma dos seus algarismos divisível por 2021. Quantos algarismos tem o menor número *caótigal*?

(proposto por Armando Barbosa)

Solução Oficial.

Se o número não for terminado em 9 no algarismo da unidade, então o seu sucessor tem a soma de algarismos mais 1 e, portanto, não teriam, ambos, a divisibilidade por 2021.

O mesmo raciocínio pode ser adaptado para 9 no algarismo da dezena (caso contrário, seria soma menos 8) e assim sucessivamente.

Daí, sendo n o número procurado e considerando que ele termina em k 9's, temos que:

$$n = A\underbrace{9\cdots9}_{k \text{ noves}}$$

onde A é um número cujo algarismo da unidade não é 9. Sendo S a soma dos dígitos, podemos concluir que:

$$S(n+1) = S(n) - 9k + 1$$

Sendo $S(n)$ e $S(n+1)$ divisíveis por 2021, temos que:

$$2021 \mid 9k - 1$$

em outras palavras, existe um inteiro positivo T tal que:

$$9k - 1 = 2021T$$

Analisando $\pmod 9$, temos que:

$$5T + 1 \equiv 0 \pmod 9$$

De onde, temos que $T = 7$ é a menor solução inteira positiva. Daí, fazendo $T = 7$, temos $\boxed{k = 1572}$. Sabemos, portanto, que n deve ter, pelo menos, 1572 noves no final.

Falta, agora, a condição $S(n)$ ser divisível por 2021 com A não tendo 9 no algarismo da unidade. Daí, basta ver o resto da divisão de $1572 \cdot 9$ por 2021 e completar com 8, primeiramente, depois tantos 9's quanto forem necessários e um último algarismo de ajuste. Fazendo as contas, temos que:

Já vimos que $1572 \cdot 9 = 2021 \cdot 7 + 1$. Daí colocando um 8 para começar o A, precisaremos de $\left\lfloor \frac{2021-8}{9} \right\rfloor = 223$ noves e um 5 (resto da divisão de 2021 por 9) no algarismo mais significativo. Portanto, o número procurado é igual a:

$$n = 5\ \underbrace{9\cdots9}_{223 \text{ noves}}\ 8\ \underbrace{9\cdots9}_{1572 \text{ noves}}$$

Resposta: $1 + 223 + 1 + 1572 = \boxed{1797}$.

Solução 2.

Similarmente, à solução oficial, temos de $9k-1 = 2021T$, menor T é 7. Então, $S(n)-S(n+1) = 2021\cdot7 = 14147$. Veja que $2021|S(n+1)$, mas $S(n+1)$ é diferente de 0, pois do contrário $n+1 = 0 \implies n = -1$, absurdo.

Logo, $S(n+1) = 2021 \cdot m \geq 2021$. O menor valor de $S(n+1)$ é 2021 para garantir a menor quantidade de algarismos. Portanto, menor valor de $S(n)$ é $2021 \cdot 8 = 16168$.

Como o maior algarismo é 9, a menor quantidade de algarismos de n é $\left\lceil \frac{2021 \cdot 8}{9} \right\rceil = \left\lceil \frac{16168}{9} \right\rceil = 1797$. De fato, existe um caótigal desse tipo como o da solução oficial ou ainda:

$$n = \underbrace{9 \cdots 9}_{\text{224 noves}}\ 4\ \underbrace{9 \cdots 9}_{\text{1572 noves}}$$

Portanto, o menor caótigal possui 1797 algarismos.

Observação: Veja que nessa solução não precisamos encontrar o menor caótigal, mas é necessário dar um exemplo de um número caótigal com 1797 *algarismos.*

Problema 4. Mariana brinca com um tabuleiro 8×8 com todas as suas casas em branco. Ela diz que duas casas são vizinhas se elas possuírem um lado ou um vértice em comum, ou seja, duas casas podem ser vizinhas verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente. A brincadeira consiste em preencher as 64 casas do tabuleiro, uma após a outra, cada uma com um número de acordo com a seguinte regra: ela escolhe sempre uma casa em branco e a preenche com o número inteiro igual à quantidade de casas vizinhas desta que ainda estejam em branco. Feito isso, a casa não é mais considerada em branco.

Demonstre que o valor da soma de todos os 64 números escritos no tabuleiro ao final da brincadeira não depende da ordem do preenchimento. Além disso, calcule o valor dessa soma.

Observação: Uma casa não é vizinha a si mesma.

(proposto por Victor Bitarães)

Solução Oficial.

Seja S a soma de todos os 64 números escritos no tabuleiro ao final da brincadeira em uma ordem qualquer de preenchimento. Veja que S é igual ao número de pares de casas vizinhas. Quando se preenche pela primeira vez uma casa de um desses pares, a segunda casa, que estava vazia, contribui com exatamente uma unidade para S. No entanto, ao preencher a segunda casa do par, ambas estão preenchidas, não contribuindo para a soma total. Então, S não depende da ordem de preenchimento,

Vamos calcular S. É possível mostrar o valor com um exemplo de preenchimento. Alternativamente, podemos ver que há, por coluna, 7 pares de casas vizinhas verticalmente. Logo, há $7 \cdot 8 = 56$ pares de casas vizinhas verticalmente. Analogamente, podemos argumentar que há 56 pares de casas vizinhas horizontalmente. Olhando uma diagonal (exemplo: sentido $\backslash$), temos $7 \cdot 7$ pares de casas vizinhas, pois a coluna extrema não possui vizinhas nesse sentido. Logo, como há dois sentidos para a diagonal, há $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$ pares de vizinhos diagonalmente. Portanto, $S = 56 + 56 + 98 = 210$.