European Girls' Mathematical Olympiad 2022

Teste de Seleção

Instruções:

- Escreva seu nome e sobrenome em cada folha que usar. Eles são essenciais para sua identificação.
- Escreva somente em um dos lados de cada folha.
- Não resolva mais de uma questão por folha e indique qual problema está sendo resolvido. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos. Após esse período, as alunas terão 30 minutos para escanear e enviar as provas, mas não será mais permitido escrever nada.
- Após o término, escaneie sua prova colocando as soluções **em ordem** (problema 1, depois 2, etc, e por fim o rascunho) e envia-as como um PDF único para o seguinte formulário: https://forms.gle/EKHYZp5pxZQpzSTE6
- O PDF deve ser nomeado com o nome completo da aluna como "Fulana_De_Tal".

Problema 1. Dado um número t, consideramos os números da sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tais que

$$a_{n+1} = \frac{a_n + t}{a_n + 1},$$

para todo $n \geq 1$.

(a) Suponha que $t = 2$. Determine todos os valores iniciais de $a_1 \geq 0$, tais que $\frac{4}{3} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$ para todo $n \geq 2$.

(b) Suponha que $t = -3$. Descubra para quais valores de a_1 diferentes de -1 e 1 teremos $a_{2023} = a_1$

Problema 2. Seja M o ponto de encontro das diagonais AC e BD do quadrilátero $ABCD$. A bissetriz do ângulo $\angle ACD$ encontra AB (ou o seu prolongamento) no ponto K. Se $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, então prove que $\angle BKC = \angle CDB$.

Problema 3. Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo. Escrevemos ao redor de uma circunferência $2n$ números inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_{2n}$, nessa ordem (no sentido horário), cuja soma é igual a $4n$ e $1 \leq a_k \leq n$, para $k = 1, 2, ..., 2n$. Definimos um *arco* como sendo um conjunto da forma $a_{m+1}, ..., a_{m+k}$, onde $1 \leq k \leq 2n$ e m são inteiros (considere índices módulo $2n$). Demonstre que existem dois arcos disjuntos A e B, cuja soma dos elementos em $A \cup B$ é igual a $2n$.

Problema 4. Encontre todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que, para todo n inteiro positivo, $a^n + b^n = {c_n}^{n+1}$, para algum c_n inteiro positivo.