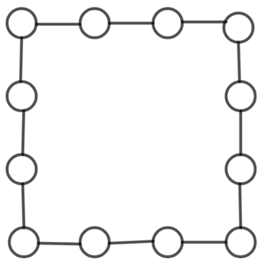
Problema 1. Uma prova de Matemática foi iniciada às 8:34 da manhã e foi encerrada 100 minutos antes do meio-dia. Se a duração da prova foi de X horas e Y minutos, determine $100X + Y$.

a) 114   b) 134   c) 180   d) 146   e) 108

Solução: 100 minutos são 1hora e 40 minutos. Portanto, a prova foi encerrada às 10h20. De 8h34 até 10h20, passaram-se 1 hora e 46 minutos. Na notação do enunciado, tem-se que $X = 1, Y = 46$. Com isso, $100X + Y = 100 + 46 = 146$.

Resposta: 146.

Problema 2. Os números de 1 a 12 são escritos nos círculos da figura de modo que a soma dos números em cada lado do quadrado é 25. Determine a soma dos números que aparecem nos vértices.



a) 20   b) 21   c) 22   d) 23   e) 24

Solução: Somando os números dispostos nos 12 círculos, o valor é $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = \frac{(12+1)\cdot 12}{2} = 78$. Como a soma de cada lado é 25, a soma dos 4 lados é $4 \cdot 25 = 100$ e corresponde exatamente à soma dos 12 dígitos mais a soma dos 4 vértices. Portanto, os números nos vértices somam $100 - 78 = 22$.

Resposta: 22.

Problema 3. Quantos dígitos tem o número $(100^{100})^{100}$?

a) 20.000   b) 20.001   c) 10.000   d) 10.001   e) 1.000.000

Solução: Por propriedade da potenciação, pode-se escrever que

$$(100^{100})^{100} = 100^{10.000} = (10^2)^{10.000} = (10^2)^{10.000} = 10^{20.000}.$$

Então, o número dado contém 20.000 zeros e, contando com o algarismo 1 inicial, são 20.001 dígitos.

Resposta: 20.001.

Problema 4. Sejam a, b reais não nulos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. O valor de $a + b - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ é

a) 1   b) 2   c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) -2

Solução: Manipulando a expressão dada usando o mmc dos denominadores, tem-se que

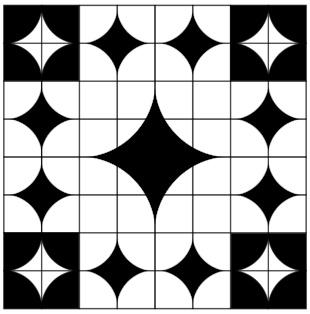
$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} \Rightarrow ab = a + b.$$

Assim,

$$a + b - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = a + b - \frac{a^2 + b^2}{ab} = ab - \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = ab - \frac{(ab)^2 - 2ab}{ab} = ab - ab + 2 = 2.$$

Resposta: 2.

Problema 5. Considere a arte em um tabuleiro 8x8 disposta abaixo.



Ela foi obtida desenhando-se $\frac{1}{4}$ de circunferência em cada quadrado e pintando partes em preto e em branco. Se cada célula do tabuleiro tem 1 cm x 1 cm, qual a área em preto, em cm²?

a) $16 + 4\pi$ b) $32 - 4\pi$ c) $8\pi + 8$ d) $16 + 8\pi$ e) $48 - 8\pi$

Solução: Primeiro olharemos para o quadrado 4x4 contido no centro do quadrado 8x8. Para calcular a área em preto desse quadrado menor, faremos a área total de um 4x4 e subtraíremos a área branca presente: $4 \cdot 4 - 4 \cdot (\frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \pi) = 16 - 4\pi$ cm². Olhando, agora, para o restante da figura, pode-se observar que ela é formada por quadrados 2x2, nos quais 4 deles têm $\frac{1}{4}$ da circunferência preta e nos outros 8, branca. Assim, são $4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi + 8 \cdot (2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi) = 4\pi + 32 - 8\pi = 32 - 4\pi$ cm². Somando as duas áreas: $16 - 4\pi + 32 - 4\pi = 48 - 8\pi$ cm².

Resposta: $48 - 8\pi$ cm².

Problema 6. O produto de dois números naturais a, b é 4320. Qual o maior valor possível para o máximo divisor comum (mdc) de a, b?

a) 6 b) 12 c) 36 d) 60 e) 72

Solução: Em fatores primos, 4320 é expresso como $4320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$. Como 5 está elevado à primeira potência, ele aparece na fatoração de apenas um dos números a, b e não pode estar presente no mdc. Deve-se alocar os fatores 2 e 3 nos dois números de modo a aumentar $\text{mdc}(a, b)$, que é igual ao produto de todos os fatores primos em comum a a, b, com respectivos expoentes dados pelo menor expoente que aparece na fatoração. Portanto, $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^n$ e $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^m$, em que $m + n = 1$. Segue que $\text{mdc}(a, b) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Resposta: 12.

Problema 7. Hoje é segunda-feira, dia 22. Qual será a próxima data em que o dia 22 cairá em uma segunda-feira?

a) 22 de dezembro de 2022 b) 22 de maio de 2023 c) 22 de julho de 2023
d) 22 de agosto de 2023 e) 22 de setembro de 2023

Solução: a ocorrência de um mesmo dia da semana se repete em ciclos de tamanho 7. Portanto, procuremos por um número de dias transcorridos desde 22 de agosto de 2022 que seja múltiplo de 7 e tal que chegue em uma data de dia 22.

	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai
Qtde. dias	31	30	31	30	31	31	28	31	30	31
Qtde. de dias desde 22/08	0	31	61	92	122	153	184	212	243	273
Resto na div. por 7	0	3	5	1	3	6	2	2	5	0

Portanto, a próxima segunda-feira dia 22 ocorre no mês de maio de 2023.

Resposta: 22 de maio de 2023.

Problema 8. Três amigas fizeram listas de livros que desejavam ler nos três meses de férias de verão de 2021/2022, com cada lista contendo 35 livros. Depois de compararem as listas, traçaram os planos de leitura: os que fossem elencados pelas três amigas seriam lidos pelo trio em dezembro de 2021; os que exatamente duas listaram seriam lidos por estas duas em janeiro de 2022; e os que apenas uma delas gostaria de ler seria lido pela menina em fevereiro de 2022. Se, ao final do período, 80 obras haviam sido lidas, então

a) Os livros lidos em fevereiro foram 55 a mais que os livros lidos em dezembro.

b) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a mais que os livros lidos em dezembro.

c) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a menos que os livros lidos em dezembro.

d) Os livros lidos em janeiro foram exatamente 25.

e) Os livros lidos em janeiro foram mais que 25.

Solução: Denote por A, B, C as amigas e sejam

a = qtde. de livros lidos por A em fevereiro.

b = qtde. de livros lidos por B em fevereiro.

c = qtde. de livros lidos por C em fevereiro.

d = qtde. de livros em comum a A, B.

e = qtde. de livros em comum a A, C.

f = qtde. de livros em comum a B, C.

g = qtde. de livros lidos em dezembro.

Com tais notações, tem-se que A leu $d + e$ livros em janeiro, B leu $d + f$ em janeiro e C leu $e + f$ em janeiro, com $d + e + f$ livros tendo sidos lidos em janeiro.

$$a + b + c + d + e + f + g = 80 \tag{1}$$
$$a + d + e + g = 35$$
$$b + d + f + g = 35$$
$$c + e + f + g = 35$$

Somando as três últimas equações,

$$a + b + c + 2(d + e + f) + 3g = 105$$

Desta e por 1,

$$d + e + f + 2g = 25$$

Somando as equações iniciais duas a duas e usando esta,

$$a + b + d = 45$$

$$a + c + e = 45$$

$$b + c + f = 45$$

Somando estas três,

$$2(a + b + c) + d + e + f = 135$$

Desta e por 1, vale que

$$a + b + c - g = 55 \Rightarrow a + b + c = 55 + g.$$

Portanto, em fevereiro foram lidos 55 livros a mais que em dezembro.

Resposta: Os livros lidos em fevereiro foram 55 a mais que os livros lidos em dezembro.

Problema 9. Qual o número de soluções em inteiros positivos para a equação $x^2y^3 = 6^{12}$?

a) 3 b) 6 c) 9 d) 18 e) 24

Solução:

$$x^2y^3 = 6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12}.$$

Desse modo, $x = 2^a \cdot 3^b$ e $y = 2^c \cdot 3^d$, com $2a + 3c = 12$ e $2b + 3d = 12$. Por estas duas equações serem semelhantes, contemos o número de soluções para apenas uma delas. Tome a primeira e note que, se c for ímpar, então $2a = 12 -$ ímpar $=$ ímpar, o que não pode ocorrer. Assim, c é um número par.

- Se $c = 0$: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$.

- Se $c = 2$: $2a + 6 = 12 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

- Se $c = 4$: $2a + 12 = 12 \Rightarrow a = 0$.

Ou seja, a equação admite 3 pares (a, c) como solução. De maneira análoga, ocorre com as soluções de $2b+3d = 12$. Combinando estes pares de solução, há $3 \cdot 3 = 9$ valores de x, y que solucionam a equação.

Resposta: 9.

Problema 10. Vitória foi visitar uma ONG que abriga 63 cachorros. Neste dia, estava programado um passeio com todos os animais e havia um total de 16 voluntários. Todos os que quisessem sair escolhiam no máximo 6 cães para levarem e as pessoas partiam juntas. Se x denota a proporção de pessoas que passearam com mais de três cachorros em relação ao total de voluntários e y é a proporção de cães que saíram em companhia de outros três ou mais animais em relação ao total destes, então

a) $x < y$ b) $y < x$ c) $x = y$ d) $x = 1$ ou $x = 0$ podem ocorrer. e) Não há dados suficientes para comparação.

Solução: Vejamos um exemplo de distribuição que pode ocorrer: 15 voluntários saindo com 4 cachorros e 1 saindo com 3 cachorros. Nessa configuração, $x = \frac{15}{16}, y = \frac{60}{63}$ e $x < y$. Pode ocorrer, ainda, de 8 pessoas levarem 3 animais, 1 ficar com 4 cães e 7 ficarem com 5 cães, o que corresponde a $x = \frac{8}{16}, y = \frac{39}{63}$ e $x < y$.

Seja p o número de pessoas que saiu com mais de três cachorros e c a quantidade de cães que saiu na companhia de três ou mais animais. Assim, $x = \frac{p}{16}$ e $y = \frac{c}{63}$. Vale, ainda, que $0 < p < 16$, pois, se fosse 0, haveria no máximo $3 \cdot 16 = 48$ e, se fosse 16, seriam no mínimo $16 \cdot 4 = 64$ animais no abrigo.

Olhando para o número de pessoas que saiu com no máximo três cachorros, tem-se que

$$63 - c \leq 3(16 - p) \Rightarrow \frac{63 - c}{16 - p} \leq 3.$$

Pensando em cada voluntário que saiu com mais de três cães, pode-se escrever que

$$c \geq 4p \Rightarrow \frac{c}{p} \geq 4.$$

Dessas duas desigualdades,

$$\frac{63 - c}{16 - p} \leq 3 < 4 \leq \frac{c}{p} \Rightarrow 63p - cp < 16c - cp \Rightarrow \frac{p}{16} < \frac{c}{63}.$$

Ou seja, $x < y$.

Resposta: $x < y$.

Problema 11. Quantos são os pares de inteiros (a, b) que solucionam a equação $ab + 4a + b = 7$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Tentemos fatorar a equação observando as parcelas $4a, b, ab$. Uma forma de fazê-lo é

$$7 = ab + 4a + b = (a + 1)(b + 4) - 4 \Rightarrow 11 = (a + 1)(b + 4).$$

Por 11 ser primo e ser dado, na equação acima, pelo produto de dois inteiros, ocorre que

$$a + 1 = 1; b + 4 = 11$$

ou

$$a + 1 = -1; b + 4 = -11$$

ou

$$a + 1 = 11; b + 4 = 1$$

ou

$$a + 1 = -11; b + 4 = -1,$$

o que produz 4 pares (a, b) de inteiros como solução.

Resposta: 4.

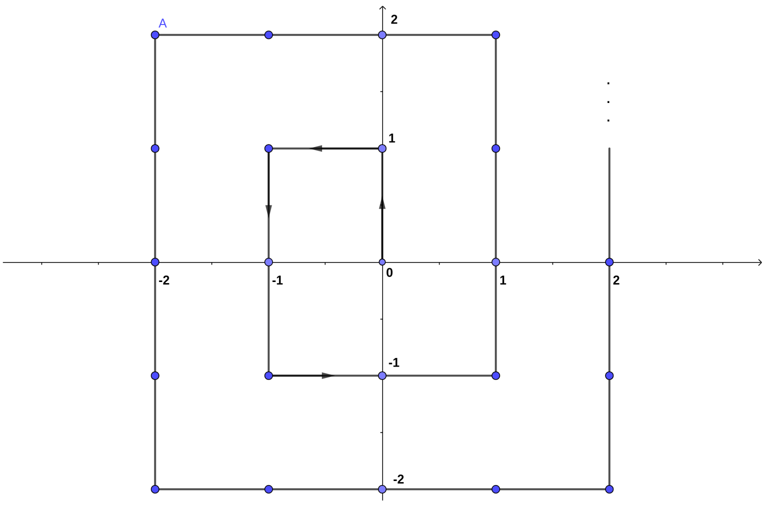
Problema 12. Sejam x, y, z inteiros positivos tais que $x = \underbrace{11\ldots1}_{y \text{ algarismos } 1}$; $y = \underbrace{11\ldots1}_{z \text{ algarismos } 1}$; e $z = 11$. Qual o resto da divisão de x^z por 9?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 8

Solução: Pelo critério de divisibilidade por 9, o resto de n na divisão por 9 é igual ao resto da soma dos algarismos de n quando esta é dividida por 9. Pelo enunciado e desse fato, y tem mesmo resto que $1+1+1+\cdots+1 = 11$, isto é, y possui resto 2 na divisão por 9. De maneira semelhante, x tem resto igual ao de y quando dividido por 9. Ou seja, x possui resto 2. Com isso, x^z tem resto igual ao de $2^{11} = 2048$ na divisão por 9, que é 5.

Resposta: 5.

Problema 13. Uma formiga está inicialmente na origem do plano cartesiano e anda, a cada segundo, uma unidade para a esquerda, direita, cima ou para baixo, seguindo o padrão de "espiral quadrática" apresentado na figura. Por exemplo, no segundo 12, a formiga estava no ponto A.



Quais as coordenadas da posição da formiga no segundo 2022?

a) $(-1012, -1012)$ b) $(1012, 1010)$ c) $(-20, 21)$ d) $(22, 20)$ e) $(22, 23)$

Solução: Note que há um padrão da posição da formiga em segundos que são quadrados perfeitos. Por exemplo,

- Em 1s: está em $(0, 1)$.
- Em 4s: está em $(-1, -1)$.
- Em 9s: está em $(1, 2)$.
- Em 16s: está em $(-2, -2)$.
- Em 25s: está em $(2, 3)$.

$\vdots$

De maneira geral, no segundo k^2, com k ímpar, a formiga está na posição $(x, x+1)$ tal que $x + (x+1) = k$. Procurando o quadrado perfeito mais próximo de 2022, este é $2025 = 45^2$. Tem-se que, no segundo 2025, a formiga está na posição $(x, x+1)$, com $2x+1 = 45 \Rightarrow x = 22$. Ou seja, em $(22, 23)$. Por querermos a localização no segundo 2022, observe, ainda, que os quadrados perfeitos ímpares estão sempre em um ponto do primeiro quadrante em que se chega depois do último movimento da formiga para cima, antes desta virar à esquerda. Com isso, 2022 conserva a posição no eixo x de 2025 e está abaixo 3 unidades, isto é, no segundo 2022 a formiga está em $(22, 20)$.

Resposta: $(22, 20)$.

Problema 14. Vitória gosta muito de festa junina e este ano mapeou as festividades na cidade onde mora. Constatou que

- Há 12 festas ocorrendo no primeiro ou segundo sábado do mês de junho;
- Uma festa pode ocorrer em apenas um dos dias ou nos dois;
- 7 festas ocorrem no primeiro sábado e 11 no segundo sábado.

Se ela pretende ir em 4 festas em cada um desses dois sábados e não quer repetir festas, de quantas formas pode realizar esta intenção?

a) 6 b) 24 c) 11.550 d) 1.925 e) 75

Solução: usando as quantidades de festas do enunciado, há

- Exatamente 6 festas que ocorrem em ambos os dias.

- Apenas 1 festa (A) que ocorre no 1° sábado mas não no 2°.

- 5 festas que ocorrem no 2° sábado mas não no 1°.

Se ela vai na festa A: são

$$1 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{11-3}{4}.$$

Se ela não vai na festa A: são

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{11-4}{4}.$$

A resposta é a soma das duas quantidades:

$$\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{8!}{4!4!} + \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 1.925.$$

Resposta: 1925.

Problema 15. Quantos são os números de dois algarismos que podem ser escritos como $TM^2 = T \cdot M \cdot M$, em que T, M são inteiros positivos maiores que 1?

a) 33 b) 34 c) 36 d) 41 e) 44

Solução: Pensando em M^2, este pode ser:

- $M^2 = 4$: então, T pode assumir valores de 3 a 24, totalizando 22 números da forma TM^2.

- $M^2 = 9$: T varia de 2 a 11. Porém, $4 \cdot 9 = 9 \cdot 4 = 36$ e $8 \cdot 9 = 18 \cdot 4 = 72$ já foram contabilizados no caso anterior. São, assim, mais 8 números da forma TM^2.

- $M^2 = 16$: T percorre os números de 2 a 6. Mas todos estes 5 já apareceram no primeiro caso.

- $M^2 = 25$: T assume os valores 2 ou 3, levando a mais dois números TM^2.

- $M^2 = 36$: a única possibilidade é que $T = 2$, mas o número 72 já foi contabilizado no primeiro caso.

- $M^2 = 49$: necessariamente, $T = 2$.

São, então, $22 + 8 + 2 + 1 = 33$ números com dois algarismos que se escrevem como TM^2, em que T, M são inteiros maiores que 1.

Resposta: 33.

Problema 16. Uma das 10 teclas de dígitos de uma calculadora está quebrada, de maneira que, ao se apertar tal tecla, insere-se um algarismo zero. João tentou escrever a seguinte conta no dispositivo:

$$12 + 123 + 234 + 345 + 456 + 567 + 678 + 789 + 890 + 901 =$$

e obteve o número 4329. Determine o valor mostrado por essa calculadora ao se fazer

$$1 + 12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 + 90 =$$

a) 347 b) 429 c) 474 d) 485 e) 743

Solução: Seja b, com $0 \leq b \leq 9$, a tecla defeituosa. Note que cada algarismo aparece exatamente três vezes no primeiro cálculo dado, sendo uma vez nas centenas, uma nas dezenas e uma nas unidades. Com isso, ao trocá-lo por zero, o que se altera no cômputo é que não é somado o valor $111b$. Portanto,

$$4329 = 111(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - b) \Rightarrow 39 = 45 - b \Rightarrow b = 6.$$

Tendo sido calculada a tecla defeituosa, segue-se o enunciado para calcular a conta $1 + 12 + 23 + 34 + 45 + 50 + 07 + 78 + 89 + 90 = 11(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 6) = 429$.

Resposta: 429.

Problema 17. Em uma prova de Matemática com 25 questões objetivas, Nelly acertou 19 questões. Se a prova foi dividida em quatro áreas: Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória e Geometria e se

- Nelly acertou 50% dos exercícios de Álgebra, todos os de Teoria dos Números, 75% dos problemas de Combinatória e 80% dos de Geometria;

- Nelly errou em Álgebra um total de 12% da prova inteira;

- O assunto que contém mais questões na prova é Combinatória,

determine a porcentagem de acerto de Nelly se a prova fosse formada apenas pelas questões de Álgebra, Teoria dos Números e Combinatória.

a) 50% b) 60% c) 66,67% d) 75% e) 80%

Solução: Denote por

$a =$ qtde. de questões de Álgebra.

$t =$ qtde. de questões de Teoria dos números.

$c =$ qtde. de questões de Combinatória.

$g =$ qtde. de questões de Geometria.

Pelos dados do enunciado,

$$a + t + c + g = 25$$

$$\frac{a}{2} + t + \frac{3}{4}c + \frac{4}{5}g = 19.$$

Como Nelly errou em Álgebra 12% da prova inteira e este valor equivale a 50% dos exercícios de Álgebra, tem-se que

$$\frac{a}{2} = 12\% \cdot 25 \Rightarrow a = 6.$$

As duas equações do início ficam, assim,

$$t + c + g = 19$$
$$t + \frac{3}{4}c + \frac{4}{5}g = 16.$$

Subtraindo a segunda da primeira,

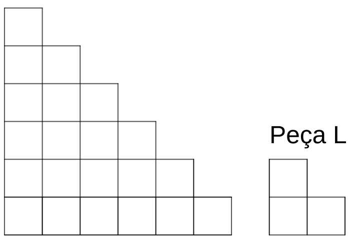
$$\frac{1}{4}c + \frac{1}{5}g = 3 \Rightarrow 5c + 4g = 60.$$

Esta igualdade mostra que c precisa ser par. Testando tais valores, vê-se que ela é verificada apenas por $c = 4, g = 10$ e por $c = 8, g = 5$. Como há mais questões de Combinatória na prova, a única possibilidade é que $c = 8, g = 5$. Portanto, $t = 25 - 6 - 8 - 5 = 6$ e, então,

$$\frac{\frac{a}{2} + t + \frac{3}{4}c}{a + t + c} = \frac{3+6+6}{6+6+8} = \frac{15}{20}.$$

Resposta: 75%.

Problema 18. A figura abaixo indica uma escada com base $n = 6$ feita com quadradinhos 1x1. Para qual valor de n a escada não pode ser coberta com peças L sem sobreposição?



a) 2021 b) 2022 c) 2023 d) 2024 e) 2025

Solução: Observe que uma escada de base n contém $n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$ quadradinhos. Para que ela seja coberta sem sobreposição, tal quantidade precisa ser um múltiplo de 3, que é a quantidade de quadradinhos em uma peça L. Desse modo, n é múltiplo de 3 ou $n + 1$ é múltiplo de 3. Por esta ser uma condição necessária ao recobrimento sem sobreposição, a alternativa correta é a única que não a respeita: 2023, pois este número não é divisível por 3 e o sucessor dele também não o é.

Resposta: 2023.

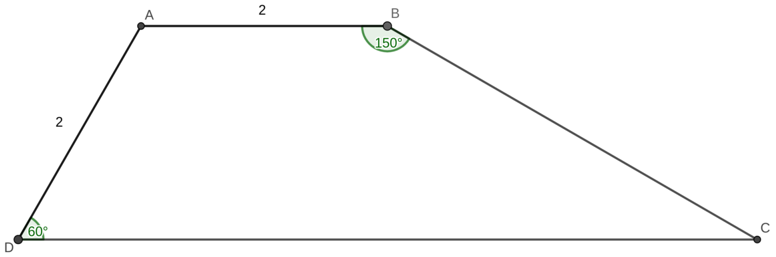
Problema 19. Em um jogo, tem-se n cartas, cada uma com 3 símbolos diferentes. Quaisquer duas cartas sempre possuem exatamente um símbolo em comum. Se os símbolos são tomados de um conjunto com 7 possibilidades distintas e se não importa a ordem de disposição dos símbolos na carta, qual o maior valor de n?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Solução: Seja $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ o conjunto de sete símbolos distintos. Tomado um desses símbolos, ele não pode figurar em 4 cartas, pois haveria ao todo $2 \cdot 4 = 8$ símbolos o acompanhando, o que é um absurdo. Portanto, o número máximo de cartas com dado símbolo é 3. Mostremos que esta configuração é atingida. Pode-se construir as cartas: $abc, adf, aeg, bde, bfg, cef, cdg$, tais que duas a duas elas admitem exatamente um símbolo em comum. Provemos que não pode haver uma oitava carta. De fato, uma vez tendo conseguido sete cartas, ocorre que cada símbolo aparece três vezes e, assim, cada um tem a companhia de 6 símbolos diferentes, não havendo símbolos para acompanhá-lo em uma oitava carta.

Resposta: 7.

Problema 20. Seja $ABCD$ um trapézio com bases AB e CD, medidas $AB = AD = 2$ e ângulos $A\hat{D}C = 60°$, $A\hat{B}C = 150°$, como na figura. Qual o valor do perímetro do trapézio $ABCD$?



a) 10 b) $8 + 2\sqrt{3}$ c) $10 + 2\sqrt{3}$ d) $8 + \sqrt{3}$ e) $7 + 2\sqrt{3}$

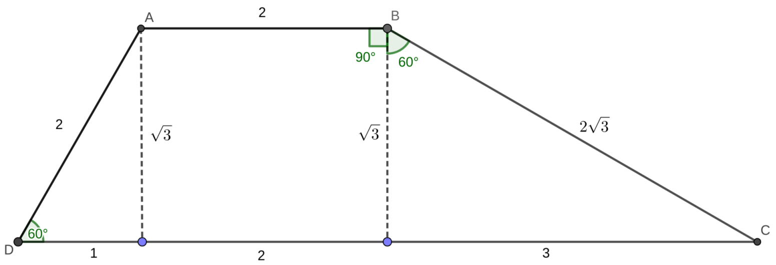
Solução: Considerando as bases do trapézio, que são segmentos paralelos, tem-se que $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}D$ são ângulos colaterais internos e, portanto, $A\hat{D}C + B\hat{A}D = 180°$. Assim, $B\hat{A}D = 120°$. Traçando a diagonal BD, formam-se dois triângulos (BAD e BCD). Olhando primeiro para o triângulo BAD, notamos que eles é isósceles, pois, do enunciado, $AB = AD = 2$. Com isso e usando $B\hat{A}D = 120°$, ocorre que $A\hat{D}B = A\hat{B}D = 30°$. Pela lei dos senos, $\frac{AD}{sen30} = \frac{BD}{sen120} \Rightarrow BD = 2\sqrt{3}$.

Olhando para o triângulo BDC, de maneira semelhante ao que se explicou acima, vale que $B\hat{C}D = 30°$, pois $B\hat{C}D + A\hat{B}C = 180°$. Além disso, como $A\hat{D}B = 30°$, tem-se que $B\hat{D}C = 30°$ e, portanto, há outro triângulos isósceles ($BD = BC = 2\sqrt{3}$, pois $B\hat{C}D = B\hat{D}C$). Consequentemente, $D\hat{B}C = 120°$. Aplicando mais uma vez a lei dos senos: $\frac{BD}{sen30} = \frac{DC}{sen120} \Rightarrow DC = 6$.

Somando todos os lados: $2 + 2 + 2\sqrt{3} + 6 = 10 + 2\sqrt{3}$.

Resposta: $10 + 2\sqrt{3}$.

Outra solução: Projetando o segmento AB sobre o lado CD, formam-se dois triângulos retângulos com ângulos internos de 30°, 60° e 90° cada um. Usando relações trigonométricas (seno e cosseno), calculam-se as medidas dos outros dois lados do trapézio, como mostra a figura.



Problema 21. Seja n o menor natural que possui exatamente 21 divisores positivos. Determine a quantidade de divisores positivos de $n-1$.

a) 3 b) 6 c) 8 d) 14 e) 16

Solução: Dado um número qualquer $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, com p_i números primos e $\alpha_i \geq 1$, para todo $1 \leq i \leq k$, o número de divisores positivos de n é dado por $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$. Utilizando tal fato, observe que $21 = 3 \cdot 7$. Assim, há apenas dois fatores primos distintos na fatoração de n e estes aparecem com expoentes 2 e 6. Por querermos o menor n, este é $2^6 \cdot 3^2$. Vale que

$$n - 1 = 2^6 \cdot 3^2 - 1 = (2^3 \cdot 3 + 1)(2^3 \cdot 3 - 1) = 25 \cdot 23 = 5^2 \cdot 23.$$

Tendo sido calculada a forma fatorada de $n-1$, o número de divisores positivos deste é $(2+1)(1+1) = 3 \cdot 2 = 6$.

Resposta: 6.

Problema 22. Sejam p_1, p_2 dois primos que satisfazem, simultaneamente

$$p_1, p_2 \leq 20$$

$$p_2 - 1 \text{ divide } p_1$$

$$p_2 \text{ divide } p_1^{p_1} + 2021^{2022}.$$

Quantos são os pares (p_1, p_2) verificando as três condições acima?

a) 7 b) 8 c) 14 d) 16 e) 20

Solução: Por definição de número primo, este apresenta apenas dois divisores positivos diferentes: ele próprio e o 1. Com isso e da segunda condição, $p_2 - 1 = 1$ ou $p_2 - 1 = p_1$.

- Se $p_2 - 1 = 1$: vale que $p_2 = 2$ e, para que a terceira expressão seja satisfeita, é necessário e suficiente que p_1 seja ímpar, pois $p_1^{p_1} + 2021^{2022} = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}$, e, portanto, é divisível por $p_2 = 2$. Com isso, qualquer par $(p_1, p_2) = (2,3), (2,5), (2,7), (2,11), (2,13), (2,17), (2,19)$ é solução.

- Se $p_2 - 1 = p_1$: ou seja, p_1, p_2 são primos consecutivos e a única possibilidade é que $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Verifiquemos a última afirmação: 2021 deixa resto 2 na divisão por 3 e, portanto, 2021^{2022} tem mesmo resto que 2^{2022} na divisão por 3. Observe o fenômeno cíclico:

$$2^1 \text{possui resto 2 na divisão por 3}$$

$$2^2 \text{possui resto 1 na divisão por 3}$$

$$2^3 \text{possui resto 2 na divisão por 3}$$

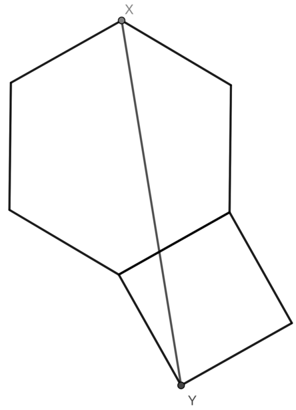
$$2^4 \text{possui resto 1 na divisão por 3}$$

$$\vdots$$

Ou seja, se a potência de 2 for de expoente par, o resto na divisão por 3 é 1. Por 2022 ser par, o número $p_1^{p_1} + 2021^{2022}$ tem resto igual ao de $4+1$ na divisão por 3. Portanto, não é divisível por 3 e este caso não pode ocorrer.

Resposta: 7.

Problema 23. Na figura abaixo, vê-se um hexágono regular e um quadrado, com eles tendo um lado em comum de medida 1.



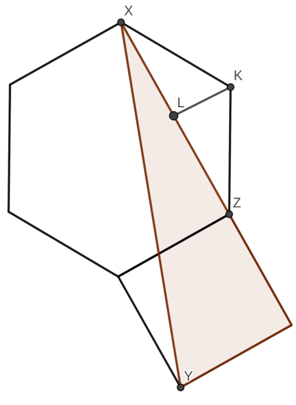
Determine o comprimento de $\overline{XY}$.

a) $5+2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ c) $2+\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ e) 5

Solução: Primeiro, trace o segmento unindo dois vértices do hexágono, X e Z. Forma-se, assim, o triângulo isósceles XKZ. O ângulo interno de um hexágono regular é dado por $\dfrac{(6-2)\cdot 180}{6} = 120^\circ$ e, portanto, $K\hat{X}Z = K\hat{Z}X = 30^\circ$. Para calcular a altura, usa-se o triângulo retângulo XKL, com

$$\cos(30) = \frac{XL}{1} \Rightarrow XL = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Com isso, $XZ = \sqrt{3}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em rosa, tem-se que

$$XY^2 = 1^2 + (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow XY^2 = 1+3+2\sqrt{3}+1 \Rightarrow XY = \sqrt{5+2\sqrt{3}}.$$

Resposta: $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Problema 24. Ana, Beatriz, Cecília, Diana e Érica resolvem jogar lobisomem. Três delas recebem o papel de aldeã, uma delas recebe o papel de intrusa e a outra fica com o papel de lobo. Aldeãs sempre falam a verdade,

enquanto que a intrusa e o lobo podem ou não mentir. São feitas as afirmações:
Ana: "Diana é aldeã."
Beatriz: "Cecília ou Érica não é aldeã."
Cecília: "Ana não é lobo."
Diana: "Beatriz ou Cecília está mentindo."
Érica: "Cecília é intrusa."

Considerando o enunciado acima e as falas das meninas, quem é o lobo?

a) Ana b) Beatriz c) Cecília d) Diana e) Érica

Solução:

- Se Ana for aldeã: ela fala a verdade e, assim, Diana é aldeã. Por esta falar a verdade, ocorre que Beatriz ou Cecília está mentindo. Note que Cecília não mente, pois Ana de fato não é lobo pela suposição. Desse modo, Beatriz mente e ocorre que Cecília e Érica são aldeãs. Mas isso é absurdo, pois há apenas 3 aldeãs no jogo. Com isso, Ana não é aldeã.

- Se Cecília for aldeã: ela diz a verdade e, então, Ana não é lobo. Por Ana não ser lobo e ter sido eliminado, pelo caso anterior, que Ana é aldeão, então Ana é intrusa. A frase de Érica fica, portanto, falsa e ela não pode ser aldeã. Pelo papel de intrusa já estar ocupado por Ana, vale que Érica é lobo e as três outras (Beatriz, Cecília e Diana) são aldeãs. Contradição com a fala de Diana. Desse modo, Cecília não pode ser aldeã.

- Como Ana e Cecília não são aldeãs, a única possibilidade é que Beatriz, Diana e Érica tenham este papel e, assim digam a verdade. Érica afirma que Cecília é intrusa. Então, resta para Ana ser lobo.

OBS: Ana ser lobo se encaixa na descrição do enunciado e nas falas das meninas.

Resposta: Ana.

Problema 25. Deseja-se colorir um tabuleiro 2022x2022 de preto e branco de modo que, em qualquer quadrado 2x2 dentro do tabuleiro, haja exatamente 2 casas em preto e 2 casas em branco. De quantas maneiras diferentes pode-se realizar esta coloração?

a) $2^{2021}-1$ b) $2^{2022}-2$ c) $2^{2022}-1$ d) $2^{2023}-2$ e) $2^{2023}-1$

Solução: Resolveremos a questão nos atentando para a pintura da primeira coluna do tabuleiro. Note que há sempre duas maneiras de colorir uma coluna: ou esta possui no mínimo dois quadrados adjacentes na cor preta ou não possui.

- Primeira possibilidade: a primeira coluna possui pelo menos dois quadrados adjacentes na cor preta: com isso, a coloração da segunda coluna já fica determinada. De fato, se, na primeira coluna, os quadrados nas linhas $i, i+1$ estão pretos, para obedecer à regra da questão deve ocorrer que, na segunda coluna, os quadrados nas linhas $i, i+1$ são brancos. A partir dessas duas colorações, pintam-se os demais quadrados na segunda coluna, o que necessariamente precisa ser feito alternando as cores que se tinha na primeira coluna em determinada linha. O número de colorações neste caso pode ser calculado retirando-se 2 (correspondente ao número de pinturas da primeira coluna que não foram permitidas) do total 2^{2022} (pois cada quadrado tem duas escolhas de cores). Isto é, são $2^{2022}-2$ colorações.

- Segunda possibilidade: alternam-se as cores na primeira coluna: então, ela pode seguir o padrão $\mathsf{P}-\mathsf{B}-\mathsf{P}-\mathsf{B}-\cdots-\mathsf{P}-\mathsf{B}-\mathsf{P}-\mathsf{B}$ ou $\mathsf{B}-\mathsf{P}-\mathsf{B}-\mathsf{P}-\cdots-\mathsf{B}-\mathsf{P}-\mathsf{B}-\mathsf{P}$. Uma vez tomada uma coloração para a primeira coluna, a segunda possui as mesmas duas possibilidades, e assim por diante. Portanto, são 2^{2022} pinturas.

Considerando estas duas configurações, são $2^{2022}-2+2^{2022}=2\cdot 2^{2022}-2=2^{2023}-2$ colorações.

Resposta: $2^{2023}-2$.
