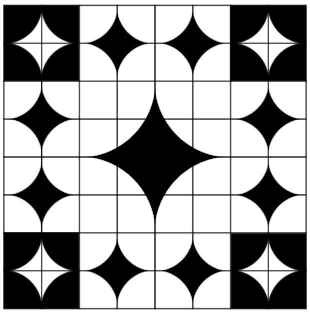
Problema 1. O produto de dois números naturais a, b é 43.200. Qual o maior valor possível para o máximo divisor comum (mdc) de a, b?

a) 24 b) 60 c) 96 d) 120 e) 240

Solução: Em fatores primos, 43.200 é expresso como $43.200 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. Deve-se alocar os fatores 2, 3 e 5 nos dois números de modo a aumentar $\text{mdc}(a, b)$, que é igual ao produto de todos os fatores primos em comum a a, b, com respectivos expoentes dados pelo menor expoente que aparece na fatoração. Portanto, $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Segue que $\text{mdc}(a, b) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Resposta: 120.

Problema 2. Considere a arte em um tabuleiro 8x8 disposta abaixo.



Ela foi obtida desenhando-se $\frac{1}{4}$ de circunferência em cada quadrado e pintando partes em preto e em branco. Se cada célula do tabuleiro tem 1 cm x 1 cm, qual a área em preto, em cm^2?

a) $16 + 4\pi$ b) $32 - 4\pi$ c) $8\pi + 8$ d) $16 + 8\pi$ e) $48 - 8\pi$

Solução: Primeiro olharemos para o quadrado 4x4 contido no centro do quadrado 8x8. Para calcular a área em preto desse quadrado menor, faremos a área total de um 4x4 e subtraíremos a área branca presente: $4 \cdot 4 - 4 \cdot (\frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \pi) = 16 - 4\pi$ cm^2. Olhando, agora, para o restante da figura, pode-se observar que ela é formada por quadrados 2x2, nos quais 4 deles têm $\frac{1}{4}$ da circunferência preta e nos outros 8, branca. Assim, são $4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi + 8 \cdot (2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi) = 4\pi + 32 - 8\pi = 32 - 4\pi$ cm^2. Somando as duas áreas: $16 - 4\pi + 32 - 4\pi = 48 - 8\pi$ cm^2.

Resposta: $48 - 8\pi$ cm^2.

Problema 3. Uma das 10 teclas de dígitos de uma calculadora está quebrada, de maneira que, ao se apertar tal tecla, insere-se um algarismo zero. João tentou escrever a seguinte conta no dispositivo:

$$12 + 123 + 234 + 345 + 456 + 567 + 678 + 789 + 890 + 901 =$$

e obteve o número 4329. Determine o valor mostrado por essa calculadora ao se fazer

$$1 + 12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 + 90 =$$

a) 347 b) 429 c) 474 d) 485 e) 743

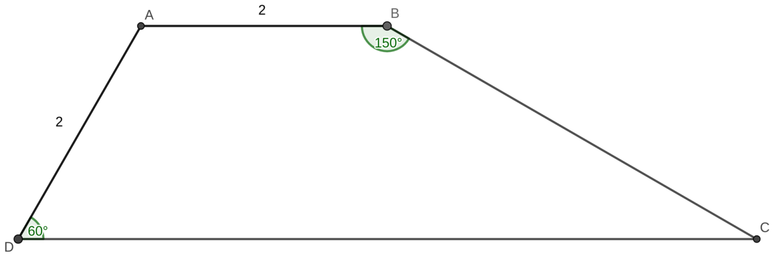
Solução: Seja b, com $0 \le b \le 9$, a tecla defeituosa. Note que cada algarismo aparece exatamente três vezes no primeiro cálculo dado, sendo uma vez nas centenas, uma nas dezenas e uma nas unidades. Com isso, ao trocá-lo por zero, o que se altera no cômputo é que não é somado o valor $111b$. Portanto,

$$4329 = 111(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9-b) \Rightarrow 39 = 45 - b \Rightarrow b = 6.$$

Tendo sido calculada a tecla defeituosa, segue-se o enunciado para calcular a conta $1+12+23+34+45+50+07+78+89+90 = 11(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9-6) = 429$.

Resposta: 429.

Problema 4. Seja $ABCD$ um trapézio com bases AB e CD, medidas $AB = AD = 2$ e ângulos $A\hat{D}C = 60°$, $A\hat{B}C = 150°$. Qual o valor do perímetro do trapézio $ABCD$?



a) 10 b) $8+2\sqrt{3}$ c) $10+2\sqrt{3}$ d) $8+\sqrt{3}$ e) $7+2\sqrt{3}$

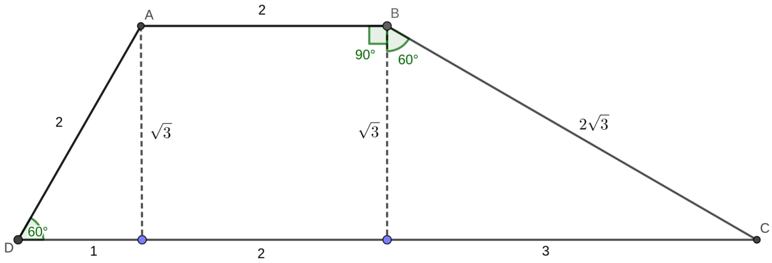
Solução: Considerando as bases do trapézio, que são segmentos paralelos, tem-se que $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}D$ são ângulos colaterais internos e, portanto, $A\hat{D}C + B\hat{A}D = 180°$. Assim, $B\hat{A}D = 120°$. Traçando a diagonal BD, formam-se dois triângulos (BAD e BCD). Olhando primeiro para o triângulo BAD, notamos que eles é isósceles, pois, do enunciado, $AB = AD = 2$. Com isso e usando $B\hat{A}D = 120°$, ocorre que $A\hat{D}B = A\hat{B}D = 30°$. Pela lei dos senos, $\dfrac{AD}{sen30} = \dfrac{BD}{sen120} \Rightarrow BD = 2\sqrt{3}$.

Olhando para o triângulo BDC, de maneira semelhante ao que se explicou acima, vale que $B\hat{C}D = 30°$, pois $B\hat{C}D + A\hat{B}C = 180°$. Além disso, como $A\hat{D}B = 30°$, tem-se que $B\hat{D}C = 30°$ e, portanto, há outro triângulos isósceles ($BD = BC = 2\sqrt{3}$, pois $B\hat{C}D = B\hat{D}C$). Consequentemente, $D\hat{B}C = 120°$. Aplicando mais uma vez a lei dos senos: $\dfrac{BD}{sen30} = \dfrac{DC}{sen120} \Rightarrow DC = 6$.

Somando todos os lados: $2+2+2\sqrt{3}+6 = 10+2\sqrt{3}$.

Resposta: $10+2\sqrt{3}$.

Outra solução: Projetando o segmento AB sobre o lado CD, formam-se dois triângulos retângulos com ângulos internos de 30°, 60° e 90° cada um. Usando relações trigonométricas (seno e cosseno), calculam-se as medidas dos outros dois lados do trapézio, como mostra a figura.



Problema 5. Em uma prova de Matemática com 25 questões objetivas, Nelly acertou 19 questões. Se a prova foi dividida em quatro áreas: Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória e Geometria e se

- Nelly acertou 50% dos exercícios de Álgebra, todos os de Teoria dos Números, 75% dos problemas de Combinatória e 80% dos de Geometria;

- Nelly errou em Álgebra um total de 12% da prova inteira;

- O assunto que contém mais questões na prova é Combinatória,

determine a porcentagem de acerto de Nelly se a prova fosse formada apenas pelas questões de Álgebra, Teoria dos Números e Combinatória.

a) 50% b) 60% c) 66,67% d) 75% e) 80%

Solução: Denote por

a = qtde. de questões de Álgebra.

t = qtde. de questões de Teoria dos números.

c = qtde. de questões de Combinatória.

g = qtde. de questões de Geometria.

Pelos dados do enunciado,

$$a + t + c + g = 25$$
$$\frac{a}{2} + t + \frac{3}{4}c + \frac{4}{5}g = 19.$$

Como Nelly errou em Álgebra 12% da prova inteira e este valor equivale a 50% dos exercícios de Álgebra, tem-se que

$$\frac{a}{2} = 12\% \cdot 25 \Rightarrow a = 6.$$

As duas equações do início ficam, assim,

$$t + c + g = 19$$
$$t + \frac{3}{4}c + \frac{4}{5}g = 16.$$

Subtraindo a segunda da primeira,

$$\frac{1}{4}c + \frac{1}{5}g = 3 \Rightarrow 5c + 4g = 60.$$

Esta igualdade mostra que c precisa ser par. Testando tais valores, vê-se que ela é verificada apenas por $c = 4, g = 10$ e por $c = 8, g = 5$. Como há mais questões de Combinatória na prova, a única possibilidade é que $c = 8, g = 5$. Portanto, $t = 25 - 6 - 8 - 5 = 6$ e, então,

$$\frac{\frac{a}{2} + t + \frac{3}{4}c}{a + t + c} = \frac{3 + 6 + 6}{6 + 6 + 8} = \frac{15}{20}.$$

Resposta: 75%.

Problema 6. Qual o número de soluções em inteiros positivos para a equação $x^2y^3 = 6^{12}$?

a) 3 b) 6 c) 9 d) 18 e) 24

Solução:

$$x^2y^3 = 6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12}.$$

Desse modo, $x = 2^a \cdot 3^b$ e $y = 2^c \cdot 3^d$, com $2a + 3c = 12$ e $2b + 3d = 12$. Por estas duas equações serem semelhantes, contemos o número de soluções para apenas uma delas. Tome a primeira e note que, se c for ímpar, então $2a = 12 -$ ímpar $=$ ímpar, o que não pode ocorrer. Assim, c é um número par.

- Se $c = 0$: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$.

- Se $c = 2$: $2a + 6 = 12 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

- Se $c = 4$: $2a + 12 = 12 \Rightarrow a = 0$.

Ou seja, a equação admite 3 pares (a, c) como solução. De maneira análoga, ocorre com as soluções de $2b+3d = 12$. Combinando estes pares de solução, há $3 \cdot 3 = 9$ valores de x, y que solucionam a equação.

Resposta: 9.

Problema 7. Três amigas fizeram listas de livros que desejam ler nos três meses de férias de verão de 2022/2023, com cada lista contendo 35 livros. Depois de compararem as listas, traçaram os planos de leitura: os que fossem elencados pelas três amigas seriam lidos pelo trio em dezembro de 2022; os que exatamente duas listaram seriam lidos por estas duas em janeiro de 2023; e os que apenas uma delas gostaria de ler seria lido pela menina em fevereiro de 2023. Se, ao final do período, 80 obras haviam sido lidas, então

a) Os livros lidos em fevereiro foram 55 a mais que os livros lidos em dezembro.
b) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a mais que os livros lidos em dezembro.
c) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a menos que os livros lidos em dezembro.
d) Os livros lidos em janeiro foram exatamente 25.
e) Os livros lidos em janeiro foram mais que 25.

Solução: Denote por A, B, C as amigas e sejam

$a =$ qtde. de livros lidos por A em fevereiro.

$b =$ qtde. de livros lidos por B em fevereiro.

$c =$ qtde. de livros lidos por C em fevereiro.

$d =$ qtde. de livros em comum a A, B.

$e =$ qtde. de livros em comum a A, C.

$f =$ qtde. de livros em comum a B, C.

$g =$ qtde. de livros lidos em dezembro.

Com tais notações, tem-se que A leu $d + e$ livros em janeiro, B leu $d + f$ em janeiro e C leu $e + f$ em janeiro, com $d + e + f$ livros tendo sidos lidos em janeiro.

$$a + b + c + d + e + f + g = 80 \quad (1)$$
$$a + d + e + g = 35$$
$$b + d + f + g = 35$$
$$c + e + f + g = 35$$

Somando as três últimas equações,

$$a + b + c + 2(d + e + f) + 3g = 105$$

Desta e por 1,

$$d + e + f + 2g = 25$$

Somando as equações iniciais duas a duas e usando esta,

$$a + b + d = 45$$

$$a + c + e = 45$$

$$b + c + f = 45$$

Somando estas três,

$$2(a + b + c) + d + e + f = 135$$

Desta e por 1, vale que

$$a + b + c - g = 55 \Rightarrow a + b + c = 55 + g.$$

Portanto, em fevereiro foram lidos 55 livros a mais que em dezembro.

Resposta: Os livros lidos em fevereiro foram 55 a mais que os livros lidos em dezembro.

Problema 8. Quantos são os números de dois algarismos que podem ser escritos como $TM^2 = T \cdot M \cdot M$, em que T, M são inteiros positivos maiores que 1?

a) 33 b) 34 c) 36 d) 41 e) 44

Solução: Pensando em M^2, este pode ser:

- $M^2 = 4$: então, T pode assumir valores de 3 a 24, totalizando 22 números da forma TM^2.

- $M^2 = 9$: T varia de 2 a 11. Porém, $4 \cdot 9 = 9 \cdot 4 = 36$ e $8 \cdot 9 = 18 \cdot 4 = 72$ já foram contabilizados no caso anterior. São, assim, mais 8 números da forma TM^2.

- $M^2 = 16$: T percorre os números de 2 a 6. Mas todos estes 5 já apareceram no primeiro caso.

- $M^2 = 25$: T assume os valores 2 ou 3, levando a mais dois números TM^2.

- $M^2 = 36$: a única possibilidade é que $T = 2$, mas o número 72 já foi contabilizado no primeiro caso.

- $M^2 = 49$: necessariamente, $T = 2$.

São, então, $22 + 8 + 2 + 1 = 33$ números com dois algarismos que se escrevem como TM^2, em que T, M são inteiros maiores que 1.

Resposta: 33.

Problema 9. No país das Maravilhas, há 5 cidades: a cidade do Sonho, a cidade do Pesadelo, a cidade da Incerteza, a cidade da Fé e a cidade da Felicidade. Há estradas ligando a cidade do Sonho às cidades do Pesadelo, Incerteza e Fé. A cidade da Felicidade conecta-se por estrada com a cidade da Incerteza. Alice encontra com o Chapeleiro Maluco, que sugere que ela ande pelas estradas ao acaso. Dada a localização de Alice, a probabilidade de seguir cada caminho possível é a mesma. Sabendo que Alice começa na cidade do Sonho, qual a probabilidade de estar na cidade do Sonho após percorrer 4 estradas, não necessariamente distintas?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{9}$

Solução: Denote por S, P, I, F, C as cidades do Sonho, Pesadelo, Incerteza, Fé e Felicidade, respectivamente. Como existem caminhos entre algumas das cidades e considerando que a escolha de dado caminho é equiprovável dada a localização de Alice, tem-se que

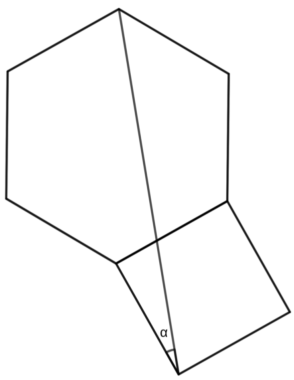
- $S - I - C - I - S$: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.
- $S - I - S - I - S$: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$.
- $S - P - S - P - S$: $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$
- $S - F - S - F - S$: $\frac{1}{9}$.
- $S - P - S - F - S$: $\frac{1}{9}$.
- $S - F - S - P - S$: $\frac{1}{9}$.
- $S - P - S - I - S$: $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$.
- $S - I - S - P - S$: $\frac{1}{18}$.
- $S - F - S - I - S$: $\frac{1}{18}$.
- $S - I - S - F - S$: $\frac{1}{18}$.

Somando tais valores,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} + \frac{4}{18} = \frac{3 + 1 + 16 + 8}{36} = \frac{7}{9}.$$

Resposta: $\frac{7}{9}$.

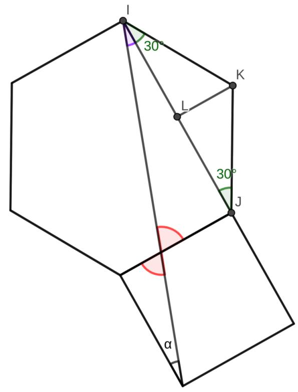
Problema 10. Na figura abaixo, vê-se um hexágono regular e um quadrado, com eles tendo um lado em comum.



Dado o ângulo α, determine $\mathrm{tg}(\alpha)$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\sqrt{3}+1$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ e) $\dfrac{1}{2}$

Solução: Seja x a medida do lado do hexágono regular, que é a medida do lado do quadrado. Trace o segmento que une os vértices do hexágono nomeados como I, J na figura. Forma-se, assim, um triângulo isósceles com dois lados medindo x.



O ângulo interno de um hexágono regular é $\dfrac{(6-2)\cdot 180}{2} = 120°$. Com isso, os ângulos em I, J medem cada um $30°$. No triângulo retângulo IKL:

$$\cos(30) = \frac{IL}{x} \Rightarrow IL = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

Desse modo, $IJ = \sqrt{3}x$. Na figura, os ângulos em vermelho são opostos pelo vértice e, portanto, congruentes. Como o restante do ângulo dentro do hexágono no vértice J mede $120 - 30 = 90°$, tem-se que o ângulo em roxo é α. Assim,

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{x}{\sqrt{3}x + x} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Problema 11. Vitória gosta muito de festa junina e este ano mapeou as festividades na cidade onde mora. Constatou que

- Há 12 festas ocorrendo no primeiro ou segundo sábado do mês de junho;
- Uma festa pode ocorrer em apenas um dos dias ou nos dois;
- 7 festas ocorrem no primeiro sábado e 11 no segundo sábado.

Se ela pretende ir em 4 festas em cada um desses dois sábados e não quer repetir festas, de quantas formas pode realizar esta intenção?

a) 6 b) 24 c) 11.550 d) 1.925 e) 75

Solução: usando as quantidades de festas do enunciado, há

- Exatamente 6 festas que ocorrem em ambos os dias.

- Apenas 1 festa (A) que ocorre no 1° sábado mas não no 2°.

- 5 festas que ocorrem no 2° sábado mas não no 1°.

Se ela vai na festa A: são

$$1 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{11-3}{4}.$$

Se ela não vai na festa A: são

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{11-4}{4}.$$

A resposta é a soma das duas quantidades:

$$\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{8!}{4!4!} + \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 1.925.$$

Resposta: 1925.

Problema 12. Sejam p_1, p_2 dois primos que satisfazem, simultaneamente

$$p_1, p_2 \leq 20$$

$$p_2 - 1 \text{ divide } p_1$$

$$p_2 \text{ divide } p_1^{p_1} + 2021^{2022}.$$

Quantos são os pares (p_1, p_2) verificando as três condições acima?

a) 7 b) 8 c) 14 d) 16 e) 20

Solução: Por definição de número primo, este apresenta apenas dois divisores positivos diferentes: ele próprio e o 1. Com isso e da segunda condição, $p_2 - 1 = 1$ ou $p_2 - 1 = p_1$.

- Se $p_2 - 1 = 1$: vale que $p_2 = 2$ e, para que a terceira expressão seja satisfeita, é necessário e suficiente que p_1 seja ímpar, pois $p_1^{p_1} + 2021^{2022} = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}$, e, portanto, é divisível por $p_2 = 2$. Com isso, qualquer par $(p_1, p_2) = (2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 11), (2, 13), (2, 17), (2, 19)$ é solução.

- Se $p_2 - 1 = p_1$: ou seja, p_1, p_2 são primos consecutivos e a única possibilidade é que $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Verifiquemos a última afirmação: 2021 deixa resto 2 na divisão por 3 e, portanto, 2021^{2022} tem mesmo resto que 2^{2022} na divisão por 3. Observe o fenômeno cíclico:

$$2^1 \text{possui resto 2 na divisão por 3}$$

$$2^2 \text{possui resto 1 na divisão por 3}$$

$$2^3 \text{possui resto 2 na divisão por 3}$$

$$2^4 \text{possui resto 1 na divisão por 3}$$

$$\vdots$$

Ou seja, se a potência de 2 for de expoente par, o resto na divisão por 3 é 1. Por 2022 ser par, o número $p_1^{p_1} + 2021^{2022}$ tem resto igual ao de $4 + 1$ na divisão por 3. Portanto, não é divisível por 3 e este caso não pode ocorrer.

Resposta: 7.

Problema 13. Em um jogo, tem-se n cartas, cada uma com 3 símbolos diferentes. Quaisquer duas cartas sempre possuem exatamente um símbolo em comum. Se os símbolos são tomados de um conjunto com 7 possibilidades distintas e se não importa a ordem de disposição dos símbolos na carta, qual o maior valor de n?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Solução: Seja $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ o conjunto de sete símbolos distintos. Tomado um desses símbolos, ele não pode figurar em 4 cartas, pois haveria ao todo $2 \cdot 4 = 8$ símbolos o acompanhando, o que é um absurdo. Portanto, o número máximo de cartas com dado símbolo é 3. Mostremos que esta configuração é atingida. Pode-se construir as cartas: $abc, adf, aeg, bde, bfg, cef, cdg$, tais que duas a duas elas admitem exatamente um símbolo em comum. Provemos que não pode haver uma oitava carta. De fato, uma vez tendo conseguido sete cartas, ocorre que cada símbolo aparece três vezes e, assim, cada um tem a companhia de 6 símbolos diferentes, não havendo símbolos para acompanhá-lo em uma oitava carta.

Resposta: 7.

Problema 14. Seja n o menor natural que possui exatamente 35 divisores positivos. Determine a quantidade de divisores positivos de $n-1$.

a) 2 b) 4 c) 7 d) 12 e) 14

Solução: Dado um número qualquer $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, com p_i números primos e $\alpha_i \geq 1$, para todo $1 \leq i \leq k$, o número de divisores positivos de n é dado por $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Utilizando tal fato, observe que $35 = 5 \cdot 7$. Assim, há apenas dois fatores primos distintos na fatoração de n e estes aparecem com expoentes 4 e 6. Por querermos o menor n, este é $2^6 \cdot 3^4$. Vale que

$$n - 1 = 2^6 \cdot 3^4 - 1 = (2^3 \cdot 3^2 + 1)(2^3 \cdot 3^2 - 1) = 73 \cdot 71.$$

Tendo sido calculada a forma fatorada de $n-1$, o número de divisores positivos deste é $(1+1)(1+1) = 2 \cdot 2 = 4$.

Resposta: 4.

Problema 15. Vitória foi visitar uma ONG que abriga 63 cachorros. Neste dia, estava programado um passeio com todos os animais e havia um total de 16 voluntários. Todos os que quisessem sair escolhiam no máximo 6 cães para levarem e as pessoas partiam juntas. Se x denota a proporção de pessoas que passearam com mais de três cachorros em relação ao total de voluntários e y é a proporção de cães que saíram em companhia de outros três ou mais animais em relação ao total destes, então

a) $x < y$ b) $y < x$ c) $x = y$ d) $x = 1$ ou $x = 0$ podem ocorrer. e) Não há dados suficientes para comparação.

Solução: Vejamos um exemplo de distribuição que pode ocorrer: 15 voluntários saindo com 4 cachorros e 1 saindo com 3 cachorros. Nessa configuração, $x = \frac{15}{16}, y = \frac{60}{63}$ e $x < y$. Pode ocorrer, ainda, de 8 pessoas levarem 3 animais, 1 ficar com 4 cães e 7 ficarem com 5 cães, o que corresponde a $x = \frac{8}{16}, y = \frac{39}{63}$ e $x < y$.

Seja p o número de pessoas que saiu com mais de três cachorros e c a quantidade de cães que saiu na companhia de três ou mais animais. Assim, $x = \frac{p}{16}$ e $y = \frac{c}{63}$. Vale, ainda, que $0 < p < 16$, pois, se fosse 0, haveria no máximo $3 \cdot 16 = 48$ e, se fosse 16, seriam no mínimo $16 \cdot 4 = 64$ animais no abrigo.

Olhando para o número de pessoas que saiu com no máximo três cachorros, tem-se que

$$63 - c \leq 3(16 - p) \Rightarrow \frac{63 - c}{16 - p} \leq 3.$$

Pensando em cada voluntário que saiu com mais de três cães, pode-se escrever que

$$c \geq 4p \Rightarrow \frac{c}{p} \geq 4.$$

Dessas duas desigualdades,

$$\frac{63-c}{16-p} \leq 3 < 4 \leq \frac{c}{p} \Rightarrow 63p - cp < 16c - cp \Rightarrow \frac{p}{16} < \frac{c}{63}.$$

Ou seja, $x < y$.

Resposta: $x < y$.

Problema 16. Sejam x, y, z inteiros positivos tais que $\underbrace{x = 11\ldots1}_{y \text{ algarismos } 1}$; $y = \underbrace{11\ldots1}_{z \text{ algarismos } 1}$; e $z = 11111$. Qual o resto da divisão de x^z por 9?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 8

Solução: Pelo critério de divisibilidade por 9 e usando a notação de congruência modular, tem-se que

$$x \equiv y \equiv z \equiv 5 \pmod 9.$$

Portanto, $x^z \equiv 5^{11111} \pmod 9$. Como $5^3 = 125 \equiv -1 \pmod 9$ e $11111 = 3 \cdot 3703 + 2$, pode-se escrever que

$$x^z \equiv 5^{11111} = (5^3)^{3703} \cdot 5^2 \equiv (-1)^{3703} \cdot 25 = -25 \equiv 2 \pmod 9.$$

Resposta: 2.

Problema 17. Em um triângulo isósceles ABC, com $AB = AC$, considere D o ponto em AC e E o ponto em AB tais que $BD = BC$ e $AD = DE$. Dado $E\hat{B}D = 15°$, qual o valor de $E\hat{D}B$?

a) 15° b) 20° c) 25° d) 30° e) 35°

Solução: Seja $\angle EDB = \theta$. Por ângulo externo, tem-se que

$$\angle DEA = \angle EDB + \angle DBA = \theta + \angle 15°.$$

Como $AD = DE$, segue que $\angle EAD = \theta + 15°$.

Novamente por ângulo externo, vale que

$$\angle BDC = \angle EAD + \angle EBD = (\theta + 15°) + 15° = \theta + 30°.$$

Dessa forma, como $BD = DC$, ocorre que $\angle DCB = \angle BDC = \theta + 30°$ e $\angle DBC = 180° - 2(\theta + 30°) = 120° - 2\theta$.

Finalmente, por $AB = AC$,

$$\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle EBD + \angle DBC = \angle DCB \Rightarrow 15° + (120° - 2\theta) = \theta + 30° \Rightarrow \theta = 35°.$$

Resposta: 35°.

Problema 18. As amigas Ana, Beatriz, Carla, Débora e Elisa decidem realizar um torneio de xadrez entre elas. Cada uma enfrentará a outra exatamente uma vez e será atribuída a pontuação: 1, para quem ganhar a partida; $\frac{1}{2}$, para cada uma das adversárias quando houver empate; e 0, para quem perder a partida. Ao final do torneio, as amigas contabilizam os pontos e a que tiver o maior número vence o torneio. Terminada a competição, elas afirmam que

Ana: "Eu perdi apenas para a Beatriz."
Beatriz: "Obtive $\frac{3}{2}$ pontos no torneio."
Carla: "Empatei exatamente três vezes."
Débora: "Venci apenas Carla e Beatriz."
Elisa: "Obtive 2 pontos no torneio."

Sabendo que houve apenas uma pessoa com a pontuação máxima e que as meninas disseram a verdade, qual das alternativas abaixo está correta?

a) Débora ganhou o torneio e Elisa ganhou de Beatriz.
b) Carla e Ana tiveram a mesma pontuação no torneio.
c) Elisa ganhou de Beatriz e de Débora.
d) Ana obteve $\dfrac{5}{2}$ pontos no torneio.
e) Beatriz ganhou de Ana e empatou com Elisa.

Solução: Cada menina participa de 4 jogos. Pode-se verificar que a única possibilidade de resultados para os seis jogos é:

Ana X Beatriz: Beatriz. Ana X Carla: empate. Ana X Débora: empate.

Ana X Elisa: Ana. Beatriz X Carla: empate. Beatriz X Débora: Débora.

Beatriz X Elisa: Elisa. Carla X Débora: Débora. Carla X Elisa: empate.

Débora X Elisa: empate.

Com isso, o placar fica 3 para Débora, 2 para Ana e para Elisa e $\dfrac{3}{2}$ para Beatriz e para Carla.

Resposta: Débora ganhou o torneio e Elisa ganhou de Beatriz.

Problema 19. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_8$ números reais positivos tais que $x_1 + 2x_2 + \cdots + 8x_8 = 156$. Determine o menor valor de $x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 8x_8^2$.

a) 312 b) 466 c) 512 d) 676 e) 762

Solução: A ideia principal é usar desigualdade das médias, mais precisamente, $MQ \geq MA$, isto é, Média Quadrática é maior ou igual à Média Aritmética.

Como exemplo, a média quadrática para dois números reais positivos a e b é $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ e a média aritmética é $\dfrac{a+b}{2}$.

Ainda, para conseguir que os coeficientes como em $2x_2^2$ apareçam, consideremos que $kx_k = \underbrace{x_k + x_k + \cdots + x_k}_{\text{k termos}}$ para todo $k \in \{1, 2, \cdots, 8\}$. Calculemos o total de parcelas não necessariamente distintas na soma pedida:

$$1 + 2 + \cdots + 8 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \text{ termos.}$$

Logo,

$$\sqrt{\frac{x_1^2+2x_2^2+\cdots+8x_8^2}{36}} \geq \frac{x_1+2x_2+\cdots+8x_8}{36}$$
$$\frac{\sqrt{x_1^2+2x_2^2+\cdots+8x_8^2}}{6} \geq \frac{156}{36}=\frac{13}{3}$$
$$\sqrt{x_1^2+2x_2^2+\cdots+8x_8^2} \geq \frac{6\cdot 13}{3}=2\cdot 13=26$$
$$x_1^2+2x_2^2+\cdots+8x_8^2 \geq 26^2=676.$$

Portanto, a cota inferior para $x_1^2+2x_2^2+\cdots+8x_8^2$ é 676. Temos que verificar se de fato essa cota é atingível. A igualdade na desigualdade das médias ocorre quando todos os termos são iguais, isto é, $x_1=x_2=\cdots=x_8=\frac{156}{36}=\frac{13}{3}$. Com isso, $x_1^2+2x_2^2+\cdots+8x_8^2=36\cdot\frac{13^2}{3^2}=676$.

Resposta: 676.

Problema 20. Ana, Beatriz, Cecília, Diana e Érica resolvem jogar lobisomem. Três delas recebem o papel de aldeã, uma delas recebe o papel de intrusa e a outra fica com o papel de lobo. Aldeãs sempre falam a verdade, enquanto que a intrusa e o lobo podem ou não mentir. São feitas as afirmações:

Ana: "Diana é aldeã."
Beatriz: "Cecília ou Érica não é aldeã."
Cecília: "Ana não é lobo."
Diana: "Beatriz ou Cecília está mentindo."
Érica: "Cecília é intrusa."

Considerando o enunciado acima e as falas das meninas, quem é o lobo?

a) Ana b) Beatriz c) Cecília d) Diana e) Érica

Solução:

- Se Ana for aldeã: ela fala a verdade e, assim, Diana é aldeã. Por esta falar a verdade, ocorre que Beatriz ou Cecília está mentindo. Note que Cecília não mente, pois Ana de fato não é lobo pela suposição. Desse modo, Beatriz mente e ocorre que Cecília e Érica são aldeãs. Mas isso é absurdo, pois há apenas 3 aldeãs no jogo. Com isso, Ana não é aldeã.

- Se Cecília for aldeã: ela diz a verdade e, então, Ana não é lobo. Por Ana não ser lobo e ter sido eliminado, pelo caso anterior, que Ana é aldeão, então Ana é intrusa. A frase de Érica fica, portanto, falsa e ela não pode ser aldeã. Pelo papel de intrusa já estar ocupado por Ana, vale que Érica é lobo e as três outras (Beatriz, Cecília e Diana) são aldeãs. Contradição com a fala de Diana. Desse modo, Cecília não pode ser aldeã.

- Como Ana e Cecília não são aldeãs, a única possibilidade é que Beatriz, Diana e Érica tenham este papel e, assim digam a verdade. Érica afirma que Cecília é intrusa. Então, resta para Ana ser lobo.

OBS: Ana ser lobo se encaixa na descrição do enunciado e nas falas das meninas.

Resposta: Ana.

Problema 21. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real que satisfaz a equação $f(x) = \lfloor f(x) \rfloor + \dfrac{7x - 2022}{2023}$. Na reta real, qual o maior comprimento para o conjunto D?

Nota: $\lfloor y \rfloor$ *é o maior inteiro que não ultrapassa* y. *Exemplo:* $\lfloor 3,141592\ldots \rfloor = 3$.

a) 248 b) 258 c) 268 d) 278 e) 289

Solução: Pela definição da função piso, valem as desigualdades $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$. Portanto, $y - \lfloor y \rfloor \geq 0$ e, assim,

$$\frac{7x - 2022}{2023} \geq 0 \Rightarrow 7x - 2022 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2022}{7}.$$

Por outro lado, $y - \lfloor y \rfloor < 1$ e, então,

$$\frac{7x - 2022}{2023} < 1 \Rightarrow 7x - 2022 < 2023 \Rightarrow x < \frac{4045}{7}.$$

Com isso, o maior D é dado por $[\frac{2022}{7}, \frac{4045}{7}[$, que possui comprimento $\dfrac{4045}{7} - \dfrac{2022}{7} = \dfrac{2023}{7} = 289$.

Resposta: 289.

Problema 22. Seja $P(x)$ um polinômio mônico de grau 5, isto é, $P(x)$ se expressa como $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, em que a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 são constantes. Se $P(1) = P(2)$, $P(3) = P(4)$, $P(5) = P(6)$ e $P(7) = P(8)$, determine o valor de $P(9) - P(8)$.

a) 256 b) 321 c) 458 d) 525 e) 613

Solução: Defina o polinômio $Q(x) := P(x+1) - P(x)$. Vale que

$$P(x+1)-P(x) = [(x+1)^5+a_4(x+1)^4+a_3(x+1)^3+a_2(x+1)^2+a_1(x+1)+a_0]-[x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0] = 5x^4+R(x),$$

em que $R(x)$ é um polinômio de grau 3. Por $Q(x)$ ser de grau 4, possui exatamente 4 raízes. Do enunciado, estas são $x = 1, 3, 5, 7$. Com isso, pode-se fatorá-lo na forma

$$Q(x) = 5(x-1)(x-3)(x-5)(x-7).$$

Substituindo $x = 8$, vale que

$$Q(8) = P(9) - P(8) = 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 525.$$

Resposta: 525.

Problema 23. Deseja-se colorir um tabuleiro 2022x2022 de preto e branco de modo que, em qualquer quadrado 2x2 dentro do tabuleiro, haja exatamente 2 casas em preto e 2 casas em branco. De quantas maneiras diferentes pode-se realizar esta coloração?

a) $2^{2021} - 1$ b) $2^{2022} - 2$ c) $2^{2022} - 1$ d) $2^{2023} - 2$ e) $2^{2023} - 1$

Solução: Resolveremos a questão nos atentando para a pintura da primeira coluna do tabuleiro. Note que há sempre duas maneiras de colorir uma coluna: ou esta possui no mínimo dois quadrados adjacentes na cor preta ou não possui.

- Primeira possibilidade: a primeira coluna possui pelo menos dois quadrados adjacentes na cor preta: com isso, a coloração da segunda coluna já fica determinada. De fato, se, na primeira coluna, os quadrados nas linhas $i, i+1$ estão pretos, para obedecer à regra da questão deve ocorrer que, na segunda coluna, os quadrados nas linhas $i, i+1$ são brancos. A partir dessas duas colorações, pintam-se os demais quadrados na segunda coluna, o que necessariamente precisa ser feito alternando as cores que se tinha na primeira coluna em determinada linha. O número de colorações neste caso pode ser calculado retirando-se 2 (correspondente ao número de pinturas da primeira coluna que não foram permitidas) do total 2^{2022} (pois cada quadrado tem duas escolhas de cores). Isto é, são $2^{2022} - 2$ colorações.

- Segunda possibilidade: alternam-se as cores na primeira coluna: então, ela pode seguir o padrão $P - B - P - B - \cdots - P - B - P - B$ ou $B - P - B - P - \cdots - B - P - B - P$. Uma vez tomada uma coloração para a primeira coluna, a segunda possui as mesmas duas possibilidades, e assim por diante. Portanto, são 2^{2022} pinturas.

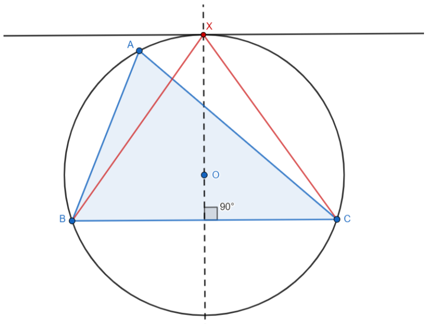
Considerando estas duas configurações, são $2^{2022} - 2 + 2^{2022} = 2 \cdot 2^{2022} - 2 = 2^{2023} - 2$ colorações.

Resposta: $2^{2023} - 2$.

Problema 24. Qual a maior área possível para um triângulo acutângulo inscrito em um círculo de raio 2022?

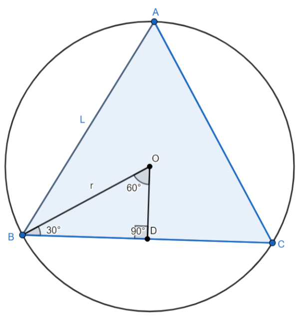
a) 2022^2 b) $\sqrt{3} \cdot 1011$ c) $3\sqrt{3} \cdot 2011$ d) $3\sqrt{3} \cdot 1011^2$ e) $3\sqrt{3} \cdot 1011^3$

Solução: Seja $\triangle ABC$ triângulo com área maximal inscrito em um círculo de raio r. Caso o triângulo não seja equilátero, existem dois lados com tamanhos diferentes. Suponha, sem perda de generalidade, que A é o vértice tal que $AB \neq AC$.



Agora, trace a mediatriz de BC, ou seja, a reta s que divide lado BC ao meio perpendicularmente. Como $AB \neq AC$, A não pertence à s. Defina X como o ponto de interseção entre o círculo e s. O $\triangle XBC$ possui área maior que o $\triangle ABC$, pois a base BC é a mesma, mas a altura de X a BC é maior que a altura de A a BC. Contradição pela suposição de maximalidade de área do $\triangle ABC$. Para ver isso, note que a tangente ao círculo por X é perpendicular à s, pois o centro do círculo pertence à r. Agora, como a tangente intercepta apenas um ponto do círculo, todos os pontos do círculo estão abaixo de s e, portanto, A está mais próximo de BC do que X.

Portanto, o triângulo com área maximal é o equilátero, cujo lado tem medida em função do raio r.



Analisando o triângulo $\triangle OBD$, cujos ângulos são $30°, 60°, 90°$, temos que $BD = \frac{L}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Então, $L = r\sqrt{3}$. A altura do $\triangle ABC$ é $H = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{3r}{2}$. Logo, a área é $\frac{L \cdot H}{2} = \frac{r\sqrt{3} \cdot 3r}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$. Finalmente, substituindo $r = 2022$, temos que a área maximal é $\frac{3 \cdot 2022^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cdot 1011^2$.

Resposta: $3\sqrt{3} \cdot 1011^2$.

Problema 25. Seja $(F_n)_n$ a sequência de Fibonacci, dada por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 0$. Então, o inteiro mais próximo de $\sum_{k=2}^{2022} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Note que, pela relação de recorrência que descreve a sequência de Fibonacci, o termo geral do somatório pode ser expresso por

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{F_k}{F_{k-1}F_kF_{k+1}} = \frac{F_{k+1} - F_{k-1}}{F_{k-1}F_kF_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=2}^{2022} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \sum_{k=2}^{2022} \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}} = \left(\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3}\right) + \left(\frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4}\right) + \cdots +$$

$$+\left(\frac{1}{F_{2020}F_{2021}} - \frac{1}{F_{2021}F_{2022}}\right) + \left(\frac{1}{F_{2021}F_{2022}} - \frac{1}{F_{2022}F_{2023}}\right) = \frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_{2022}F_{2023}} = 1 - \frac{1}{F_{2022}F_{2023}}.$$

Desse cálculo, tem-se que a soma é menor que 1. Como $\frac{1}{F_{2022}F_{2023}} < \frac{1}{2}$, então a soma é maior que $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Portanto, o inteiro mais próximo é 1.

Resposta: 1.
