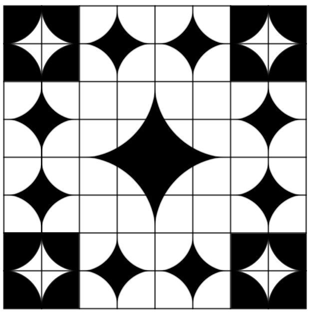
INSTRUÇÕES:

- Leia atentamente as perguntas.
- Cada questão tem uma única resposta correta.
- A prova tem 25 questões, todas com mesmo valor.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- A prova começará às 14h e terminará às 17h, do horário de Brasília.
- A prova terá 3 horas de duração, incluindo envio do gabarito.
- Organize-se para preencher o gabarito.

Problema 1. O produto de dois números naturais a, b é 43.200. Qual o maior valor possível para o máximo divisor comum (mdc) de a, b?

a) 24 b) 60 c) 96 d) 120 e) 240

Problema 2. Considere a arte em um tabuleiro 8x8 disposta abaixo.



Ela foi obtida desenhando-se $\frac{1}{4}$ de circunferência em cada quadrado e pintando partes em preto e em branco. Se cada célula do tabuleiro tem 1 cm x 1 cm, qual a área em preto, em cm^2?

a) $16 + 4\pi$ b) $32 - 4\pi$ c) $8\pi + 8$ d) $16 + 8\pi$ e) $48 - 8\pi$

Problema 3. Uma das 10 teclas de dígitos de uma calculadora está quebrada, de maneira que, ao se apertar tal tecla, insere-se um algarismo zero. João tentou escrever a seguinte conta no dispositivo:

$$12 + 123 + 234 + 345 + 456 + 567 + 678 + 789 + 890 + 901 =$$

e obteve o número 4329. Determine o valor mostrado por essa calculadora ao se fazer

$$1 + 12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 + 90 =$$

a) 347 b) 429 c) 474 d) 485 e) 743

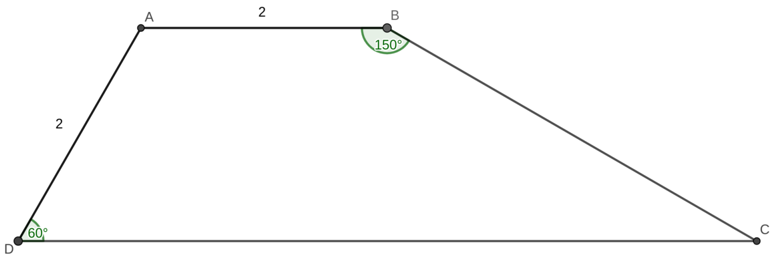
Problema 4. Seja $ABCD$ um trapézio com bases AB e CD, medidas $AB = AD = 2$ e ângulos $A\hat{D}C = 60°$, $A\hat{B}C = 150°$. Qual o valor do perímetro do trapézio $ABCD$?

Realização

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

Apoio

CNPq SBM



a) 10 b) $8 + 2\sqrt{3}$ c) $10 + 2\sqrt{3}$ d) $8 + \sqrt{3}$ e) $7 + 2\sqrt{3}$

Problema 5. Em uma prova de Matemática com 25 questões objetivas, Nelly acertou 19 questões. Se a prova foi dividida em quatro áreas: Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória e Geometria e se

- Nelly acertou 50% dos exercícios de Álgebra, todos os de Teoria dos Números, 75% dos problemas de Combinatória e 80% dos de Geometria;

- Nelly errou em Álgebra um total de 12% da prova inteira;

- O assunto que contém mais questões na prova é Combinatória,

determine a porcentagem de acerto de Nelly se a prova fosse formada apenas pelas questões de Álgebra, Teoria dos Números e Combinatória.

a) 50% b) 60% c) 66,67% d) 75% e) 80%

Problema 6. Qual o número de soluções em inteiros positivos para a equação $x^2y^3 = 6^{12}$?

a) 3 b) 6 c) 9 d) 18 e) 24

Problema 7. Três amigas fizeram listas de livros que desejam ler nos três meses de férias de verão de 2022/2023, com cada lista contendo 35 livros. Depois de compararem as listas, traçaram os planos de leitura: os que fossem elencados pelas três amigas seriam lidos pelo trio em dezembro de 2022; os que exatamente duas listaram seriam lidos por estas duas em janeiro de 2023; e os que apenas uma delas gostaria de ler seria lido pela menina em fevereiro de 2023. Se, ao final do período, 80 obras haviam sido lidas, então

a) Os livros lidos em fevereiro foram 55 a mais que os livros lidos em dezembro.
b) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a mais que os livros lidos em dezembro.
c) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a menos que os livros lidos em dezembro.
d) Os livros lidos em janeiro foram exatamente 25.
e) Os livros lidos em janeiro foram mais que 25.

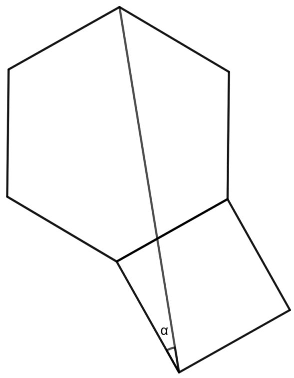
Problema 8. Quantos são os números de dois algarismos que podem ser escritos como $TM^2 = T \cdot M \cdot M$, em que T, M são inteiros positivos maiores que 1?

a) 33 b) 34 c) 36 d) 41 e) 44

Problema 9. No país das Maravilhas, há 5 cidades: a cidade do Sonho, a cidade do Pesadelo, a cidade da Incerteza, a cidade da Fé e a cidade da Felicidade. Há estradas ligando a cidade do Sonho às cidades do Pesadelo, Incerteza e Fé. A cidade da Felicidade conecta-se por estrada com a cidade da Incerteza. Alice encontra com o Chapeleiro Maluco, que sugere que ela ande pelas estradas ao acaso. Dada a localização de Alice, a probabilidade de seguir cada caminho possível é a mesma. Sabendo que Alice começa na cidade do Sonho, qual a probabilidade de estar na cidade do Sonho após percorrer 4 estradas, não necessariamente distintas?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{9}$

Problema 10. Na figura abaixo, vê-se um hexágono regular e um quadrado, com eles tendo um lado em comum.



Dado o ângulo α, determine $\mathrm{tg}(\alpha)$.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\sqrt{3}+1$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ e) $\frac{1}{2}$

Problema 11. Vitória gosta muito de festa junina e este ano mapeou as festividades na cidade onde mora. Constatou que

- Há 12 festas ocorrendo no primeiro ou segundo sábado do mês de junho;
- Uma festa pode ocorrer em apenas um dos dias ou nos dois;
- 7 festas ocorrem no primeiro sábado e 11 no segundo sábado.

Se ela pretende ir em 4 festas em cada um desses dois sábados e não quer repetir festas, de quantas formas pode realizar esta intenção?

a) 6 b) 24 c) 11.550 d) 1.925 e) 75

Problema 12. Sejam p_1, p_2 dois primos que satisfazem, simultaneamente

$$p_1, p_2 \leq 20$$

$$p_2 - 1 \text{ divide } p_1$$

$$p_2 \text{ divide } p_1^{p_1} + 2021^{2022}.$$

Quantos são os pares (p_1, p_2) verificando as três condições acima?

a) 7 b) 8 c) 14 d) 16 e) 20

Problema 13. Em um jogo, tem-se n cartas, cada uma com 3 símbolos diferentes. Quaisquer duas cartas sempre possuem exatamente um símbolo em comum. Se os símbolos são tomados de um conjunto com 7 possibilidades distintas e se não importa a ordem de disposição dos símbolos na carta, qual o maior valor de n?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 14. Seja n o menor natural que possui exatamente 35 divisores positivos. Determine a quantidade de divisores positivos de $n - 1$.

a) 2 b) 4 c) 7 d) 12 e) 14

Problema 15. Vitória foi visitar uma ONG que abriga 63 cachorros. Neste dia, estava programado um passeio com todos os animais e havia um total de 16 voluntários. Todos os que quisessem sair escolhiam no máximo 6 cães para levarem e as pessoas partiam juntas. Se x denota a proporção de pessoas que passearam com mais de três cachorros em relação ao total de voluntários e y é a proporção de cães que saíram em companhia de outros três ou mais animais em relação ao total destes, então

a) $x < y$ b) $y < x$ c) $x = y$ d) $x = 1$ ou $x = 0$ podem ocorrer. e) Não há dados suficientes para comparação.

Problema 16. Sejam x, y, z inteiros positivos tais que $x = \underbrace{11\ldots1}_{y \text{ algarismos } 1}$; $y = \underbrace{11\ldots1}_{z \text{ algarismos } 1}$; e $z = 11111$. Qual o resto da divisão de x^z por 9?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 8

Problema 17. Em um triângulo isósceles ABC, com $AB = AC$, considere D o ponto em AC e E o ponto em AB tais que $BD = BC$ e $AD = DE$. Dado $E\hat{B}D = 15°$, qual o valor de $E\hat{D}B$?

a) $15°$ b) $20°$ c) $25°$ d) $30°$ e) $35°$

Problema 18. As amigas Ana, Beatriz, Carla, Débora e Elisa decidem realizar um torneio de xadrez entre elas. Cada uma enfrentará a outra exatamente uma vez e será atribuída a pontuação: 1, para quem ganhar a partida; $\frac{1}{2}$, para cada uma das adversárias quando houver empate; e 0, para quem perder a partida. Ao final do torneio, as amigas contabilizam os pontos e a que tiver o maior número vence o torneio. Terminada a competição, elas afirmam que

Ana: "Eu perdi apenas para a Beatriz."
Beatriz: "Obtive $\frac{3}{2}$ pontos no torneio."
Carla: "Empatei exatamente três vezes."
Débora: "Venci apenas Carla e Beatriz."
Elisa: "Obtive 2 pontos no torneio."

Sabendo que houve apenas uma pessoa com a pontuação máxima e que as meninas disseram a verdade, qual das alternativas abaixo está correta?

a) Débora ganhou o torneio e Elisa ganhou de Beatriz.
b) Carla e Ana tiveram a mesma pontuação no torneio.
c) Elisa ganhou de Beatriz e de Débora.
d) Ana obteve $\dfrac{5}{2}$ pontos no torneio.
e) Beatriz ganhou de Ana e empatou com Elisa.

Problema 19. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_8$ números reais positivos tais que $x_1 + 2x_2 + \cdots + 8x_8 = 156$. Determine o menor valor de $x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 8x_8^2$.

a) 312 b) 466 c) 512 d) 676 e) 762

Problema 20. Ana, Beatriz, Cecília, Diana e Érica resolvem jogar lobisomem. Três delas recebem o papel de aldeã, uma delas recebe o papel de intrusa e a outra fica com o papel de lobo. Aldeãs sempre falam a verdade, enquanto que a intrusa e o lobo podem ou não mentir. São feitas as afirmações:

Ana: "Diana é aldeã."
Beatriz: "Cecília ou Érica não é aldeã."
Cecília: "Ana não é lobo."
Diana: "Beatriz ou Cecília está mentindo."
Érica: "Cecília é intrusa."

Considerando o enunciado acima e as falas das meninas, quem é o lobo?

a) Ana b) Beatriz c) Cecília d) Diana e) Érica

Problema 21. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real que satisfaz a equação $f(x) = \lfloor f(x) \rfloor + \dfrac{7x - 2022}{2023}$. Na reta real, qual o maior comprimento para o conjunto D?

Nota: $\lfloor y \rfloor$ *é o maior inteiro que não ultrapassa* y. *Exemplo:* $\lfloor 3,141592\ldots \rfloor = 3$.

a) 248 b) 258 c) 268 d) 278 e) 289

Problema 22. Seja $P(x)$ um polinômio mônico de grau 5, isto é, $P(x)$ se expressa como $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, em que a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 são constantes. Se $P(1) = P(2)$, $P(3) = P(4)$, $P(5) = P(6)$ e $P(7) = P(8)$, determine o valor de $P(9) - P(8)$.

a) 256 b) 321 c) 458 d) 525 e) 613

Problema 23. Deseja-se colorir um tabuleiro 2022x2022 de preto e branco de modo que, em qualquer quadrado 2x2 dentro do tabuleiro, haja exatamente 2 casas em preto e 2 casas em branco. De quantas maneiras diferentes pode-se realizar esta coloração?

a) $2^{2021} - 1$ b) $2^{2022} - 2$ c) $2^{2022} - 1$ d) $2^{2023} - 2$ e) $2^{2023} - 1$

Problema 24. Qual a maior área possível para um triângulo acutângulo inscrito em um círculo de raio 2022?

a) 2022^2 b) $\sqrt{3} \cdot 1011$ c) $3\sqrt{3} \cdot 2011$ d) $3\sqrt{3} \cdot 1011^2$ e) $3\sqrt{3} \cdot 1011^3$

Problema 25. Seja $(F_n)_n$ a sequência de Fibonacci, dada por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 0$. Então, o inteiro mais próximo de $\sum_{k=2}^{2022} \dfrac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4