**INSTRUÇÕES:**

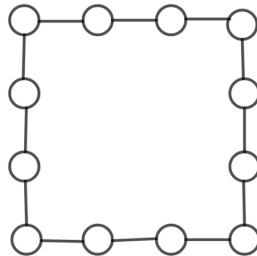
- Leia atentamente as perguntas.
- Cada questão tem uma única resposta correta.
- A prova tem 25 questões, todas com mesmo valor.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- A prova começará às 14h e terminará às 17h, do horário de Brasília.
- A prova terá 3 horas de duração, incluindo envio do gabarito.
- Organize-se para preencher o gabarito.
- Após concluir sua prova, preencha o gabarito em:

<https://forms.gle/dZioPGpnvvXGztR1A>

Problema 1. Uma prova de Matemática foi iniciada às 8:34 da manhã e foi encerrada 100 minutos antes do meio-dia. Se a duração da prova foi de X horas e Y minutos, determine $100X + Y$.

- a) 114 b) 134 c) 180 d) 146 e) 108

Problema 2. Os números de 1 a 12 são escritos nos círculos da figura de modo que a soma dos números em cada lado do quadrado é 25. Determine a soma dos números que aparecem nos vértices.



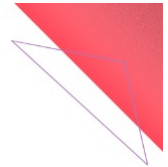
- a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 24

Problema 3. Quantos dígitos tem o número $(100^{100})^{100}$?

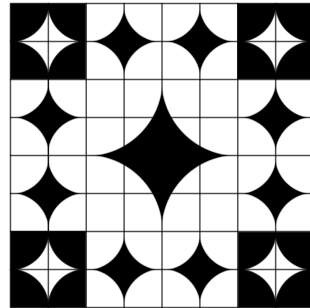
- a) 20.000 b) 20.001 c) 10.000 d) 10.001 e) 1.000.000

Problema 4. Sejam a, b reais não nulos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. O valor de $a + b - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ é

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) -2



Problema 5. Considere a arte em um tabuleiro 8x8 disposta abaixo.



Ela foi obtida desenhando-se $\frac{1}{4}$ de circunferência em cada quadrado e pintando partes em preto e em branco. Se cada célula do tabuleiro tem 1 cm x 1 cm, qual a área em preto, em cm^2 ?

- a) $16 + 4\pi$ b) $32 - 4\pi$ c) $8\pi + 8$ d) $16 + 8\pi$ e) $48 - 8\pi$

Problema 6. O produto de dois números naturais a, b é 4320. Qual o maior valor possível para o máximo divisor comum (mdc) de a, b ?

- a) 6 b) 12 c) 36 d) 60 e) 72

Problema 7. Hoje é segunda-feira, dia 22. Qual será a próxima data em que o dia 22 cairá em uma segunda-feira?

- a) 22 de dezembro de 2022 b) 22 de maio de 2023 c) 22 de julho de 2023
d) 22 de agosto de 2023 e) 22 de setembro de 2023

Problema 8. Três amigas fizeram listas de livros que desejavam ler nos três meses de férias de verão de 2021/2022, com cada lista contendo 35 livros. Depois de compararem as listas, traçaram os planos de leitura: os que fossem elencados pelas três amigas seriam lidos pelo trio em dezembro de 2021; os que exatamente duas listaram seriam lidos por estas duas em janeiro de 2022; e os que apenas uma delas gostaria de ler seria lido pela menina em fevereiro de 2022. Se, ao final do período, 80 obras haviam sido lidas, então

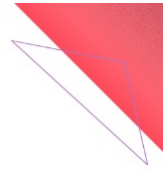
- a) Os livros lidos em fevereiro foram 55 a mais que os livros lidos em dezembro.
b) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a mais que os livros lidos em dezembro.
c) Os livros lidos em fevereiro foram 45 a menos que os livros lidos em dezembro.
d) Os livros lidos em janeiro foram exatamente 25.
e) Os livros lidos em janeiro foram mais que 25.

Problema 9. Qual o número de soluções em inteiros positivos para a equação $x^2y^3 = 6^{12}$?

- a) 3 b) 6 c) 9 d) 18 e) 24

Problema 10. Vitória foi visitar uma ONG que abriga 63 cachorros. Neste dia, estava programado um passeio com todos os animais e havia um total de 16 voluntários. Todos os que quisessem sair escolhiam no máximo 6 cães para levarem e as pessoas partiam juntas. Se x denota a proporção de pessoas que passearam com mais de três cachorros em relação ao total de voluntários e y é a proporção de cães que saíram em companhia de outros três ou mais animais em relação ao total destes, então

- a) $x < y$ b) $y < x$ c) $x = y$ d) $x = 1$ ou $x = 0$ podem ocorrer. e) Não há dados suficientes para comparação.



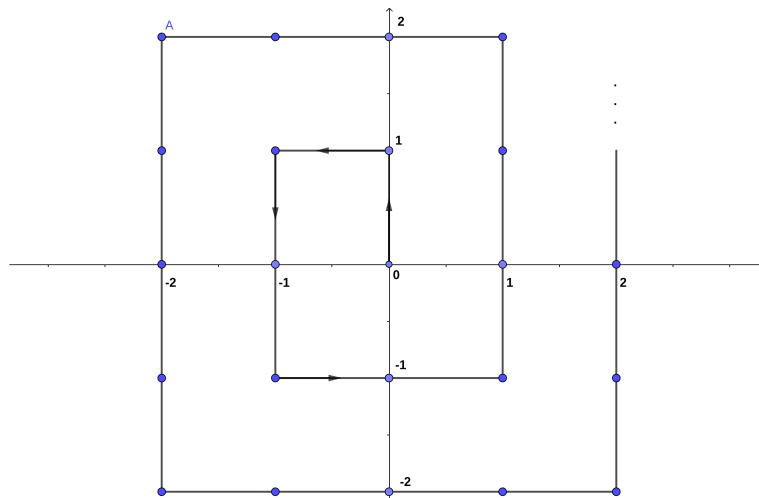
Problema 11. Quantos são os pares de inteiros (a, b) que solucionam a equação $ab + 4a + b = 7$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 12. Sejam x, y, z inteiros positivos tais que $x = \underbrace{11\dots1}_y \text{ algarismos } 1$; $y = \underbrace{11\dots1}_z \text{ algarismos } 1$; e $z = 11$. Qual o resto da divisão de x^z por 9?

- a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 8

Problema 13. Uma formiga está inicialmente na origem do plano cartesiano e anda, a cada segundo, uma unidade para a esquerda, direita, cima ou para baixo, seguindo o padrão de "espiral quadrática" apresentado na figura. Por exemplo, no segundo 12, a formiga estava no ponto A.



Quais as coordenadas da posição da formiga no segundo 2022?

- a) $(-1012, -1012)$ b) $(1012, 1010)$ c) $(-20, 21)$ d) $(22, 20)$ e) $(22, 23)$

Problema 14. Vitória gosta muito de festa junina e este ano mapeou as festividades na cidade onde mora. Constatou que

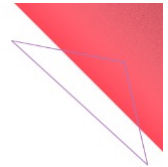
- Há 12 festas ocorrendo no primeiro ou segundo sábado do mês de junho;
- Uma festa pode ocorrer em apenas um dos dias ou nos dois;
- 7 festas ocorrem no primeiro sábado e 11 no segundo sábado.

Se ela pretende ir em 4 festas em cada um desses dois sábados e não quer repetir festas, de quantas formas pode realizar esta intenção?

- a) 6 b) 24 c) 11.550 d) 1.925 e) 75

Problema 15. Quantos são os números de dois algarismos que podem ser escritos como $TM^2 = T \cdot M \cdot M$, em que T, M são inteiros positivos maiores que 1?

- a) 33 b) 34 c) 36 d) 41 e) 44



Problema 16. Uma das 10 teclas de dígitos de uma calculadora está quebrada, de maneira que, ao se apertar tal tecla, insere-se um algarismo zero. João tentou escrever a seguinte conta no dispositivo:

$$12 + 123 + 234 + 345 + 456 + 567 + 678 + 789 + 890 + 901 =$$

e obteve o número 4329. Determine o valor mostrado por essa calculadora ao se fazer

$$1 + 12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 + 90 =$$

- a) 347 b) 429 c) 474 d) 485 e) 743

Problema 17. Em uma prova de Matemática com 25 questões objetivas, Nelly acertou 19 questões. Se a prova foi dividida em quatro áreas: Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória e Geometria e se

- Nelly acertou 50% dos exercícios de Álgebra, todos os de Teoria dos Números, 75% dos problemas de Combinatória e 80% dos de Geometria;

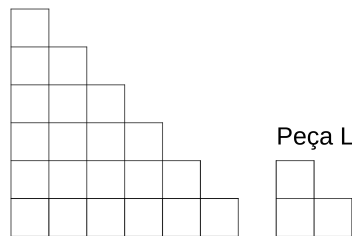
- Nelly errou em Álgebra um total de 12% da prova inteira;

- O assunto que contém mais questões na prova é Combinatória,

determine a porcentagem de acerto de Nelly se a prova fosse formada apenas pelas questões de Álgebra, Teoria dos Números e Combinatória.

- a) 50% b) 60% c) 66,67% d) 75% e) 80%

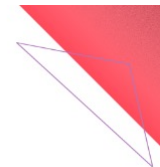
Problema 18. A figura abaixo indica uma escada com base $n = 6$ feita com quadradinhos 1×1 . Para qual valor de n a escada não pode ser coberta com peças L sem sobreposição?



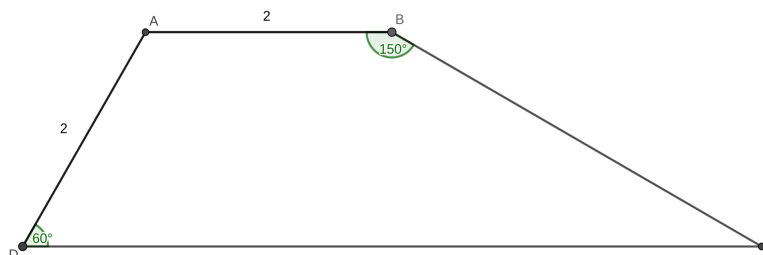
- a) 2021 b) 2022 c) 2023 d) 2024 e) 2025

Problema 19. Em um jogo, tem-se n cartas, cada uma com 3 símbolos diferentes. Quaisquer duas cartas sempre possuem exatamente um símbolo em comum. Se os símbolos são tomados de um conjunto com 7 possibilidades distintas e se não importa a ordem de disposição dos símbolos na carta, qual o maior valor de n ?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8



Problema 20. Seja $ABCD$ um trapézio com bases AB e CD , medidas $AB = AD = 2$ e ângulos $\hat{A}DC = 60^\circ$, $\hat{A}BC = 150^\circ$, como na figura. Qual o valor do perímetro do trapézio $ABCD$?



- a) 10 b) $8 + 2\sqrt{3}$ c) $10 + 2\sqrt{3}$ d) $8 + \sqrt{3}$ e) $7 + 2\sqrt{3}$

Problema 21. Seja n o menor natural que possui exatamente 21 divisores positivos. Determine a quantidade de divisores positivos de $n - 1$.

- a) 3 b) 6 c) 8 d) 14 e) 16

Problema 22. Sejam p_1, p_2 dois primos que satisfazem, simultaneamente

$$p_1, p_2 \leq 20$$

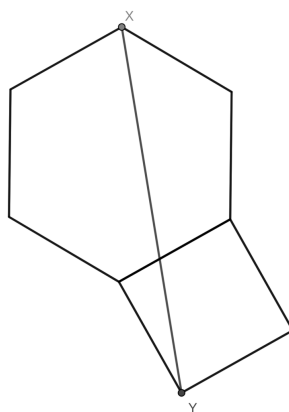
$$p_2 - 1 \text{ divide } p_1$$

$$p_2 \text{ divide } p_1^{p_1} + 2021^{2022}.$$

Quantos são os pares (p_1, p_2) verificando as três condições acima?

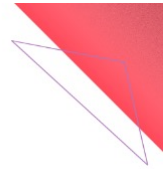
- a) 7 b) 8 c) 14 d) 16 e) 20

Problema 23. Na figura abaixo, vê-se um hexágono regular e um quadrado, com eles tendo um lado em comum de medida 1.



Determine o comprimento de \overline{XY} .

- a) $5 + 2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$ c) $2 + \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ e) 5



Problema 24. Ana, Beatriz, Cecília, Diana e Érica resolvem jogar lobisomem. Três delas recebem o papel de aldeã, uma delas recebe o papel de intrusa e a outra fica com o papel de lobo. Aldeãs sempre falam a verdade, enquanto que a intrusa e o lobo podem ou não mentir. São feitas as afirmações:

Ana: "Diana é aldeã."

Beatriz: "Cecília ou Érica não é aldeã."

Cecília: "Ana não é lobo."

Diana: "Beatriz ou Cecília está mentindo."

Érica: "Cecília é intrusa."

Considerando o enunciado acima e as falas das meninas, quem é o lobo?

- a) Ana b) Beatriz c) Cecília d) Diana e) Érica

Problema 25. Deseja-se colorir um tabuleiro 2022×2022 de preto e branco de modo que, em qualquer quadrado 2×2 dentro do tabuleiro, haja exatamente 2 casas em preto e 2 casas em branco. De quantas maneiras diferentes pode-se realizar esta coloração?

- a) $2^{2021} - 1$ b) $2^{2022} - 2$ c) $2^{2022} - 1$ d) $2^{2023} - 2$ e) $2^{2023} - 1$