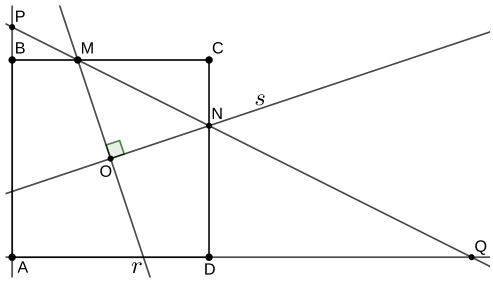
INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
- A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
- Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
- Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, escreva isso e "Rascunho".
- Os enunciados devem ser devolvidos e a prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
- Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrado de centro O. Duas retas perpendiculares, r, s, que passam por O tocam os lados BC e CD em M, N, respectivamente. A reta MN toca os prolongamentos de AB e AD em P, Q, respectivamente. Prove que o produto $BP \cdot DQ$ é o dobro da área do triângulo MNC.

Nota: A figura abaixo não está em escala para fins de cálculo.



Problema 2. Sejam x, y números reais tais que $x, y \neq \frac{1}{2}$ e $x + y \neq 1$, com $\dfrac{x^2-4}{2x-1} + \dfrac{y^2-4}{2y-1} = x + y$. Determine o valor de $2xy - x - y$.

Problema 3. Uma universidade está promovendo um evento de visitações em suas 8.088 dependências, representadas pelos pontos centrais dos quadrados no tabuleiro 4×2022 das figuras. Os roteiros são tais que:

- podem ter inicio em qualquer um desses lugares e variam na quantidade de locais visitados;
- podem ser percorridos de uma das três formas, como na figura 1: apenas em segmentos verticais, apenas em segmentos horizontais ou apenas em formatos retangulares;
- se o roteiro passa por um local, então dizemos que a pessoa o visita.

A figura 2 mostra dois roteiros que **NÃO** existem.

Sabendo que um roteiro é considerado diferente de outro se percorre um conjunto diferente de dependências, não importando a ordem, qual o número de roteiros que visitam o laboratório de Química?

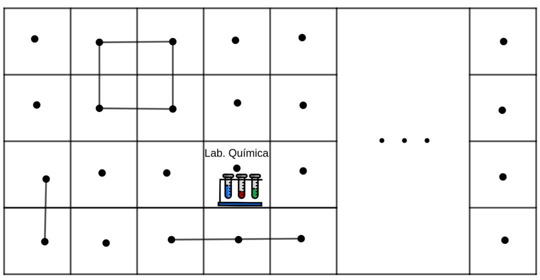


Figura 1

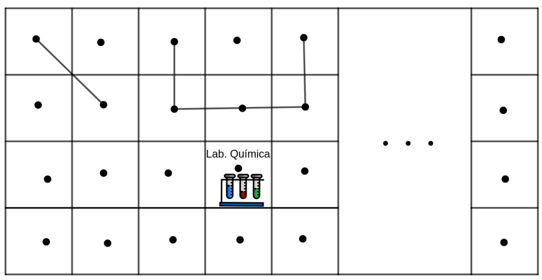


Figura 2

Problema 4. Um número inteiro positivo m é dito *precioso* se **NÃO** existir nenhum inteiro positivo n tal que $n^2 + 2^n$ seja múltiplo de m.

a) Calcule o menor inteiro positivo precioso.

b) Mostre que existem infinitos primos **NÃO** preciosos.