

## INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
  - A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
  - Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
  - Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, escreva isso e "Rascunho".
  - Os enunciados devem ser devolvidos e a prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
  - Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!
- 

**Problema 1.** Seja  $ABC$  um triângulo isósceles e retângulo em  $B$ . Sejam  $D$  e  $E$  os pontos médios de  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. O ponto  $F$  é tomado no interior de  $ABC$ , de modo que  $DEF$  seja um triângulo equilátero. As retas  $BF$  e  $AC$  se intersectam em  $X$  e as retas  $AF$  e  $BD$  se intersectam em  $Y$ . Mostre que  $DX = DY$ .

**Problema 2.** Sejam  $x$  e  $y$  números inteiros com

$$\frac{x^2 - 4}{2x - 1} + \frac{y^2 - 4}{2y - 1} = x + y.$$

Determine todas as soluções  $(x, y)$  para a equação.

**Problema 3.** Há  $n$  fichas numa mesa,  $n$  um inteiro positivo. Ana Paula e Kellem jogam um jogo em turnos alternados, com Ana Paula sendo a primeira a jogar.

Em cada rodada, a jogadora atual pode retirar qualquer quantidade de fichas de  $1$  a  $t + 1$ , onde  $t$  é o número de fichas removidas pela jogadora anterior. (Ana Paula é forçada a retirar exatamente 1 ficha em sua primeira jogada.) Ganha quem retirar a última ficha.

Determine todos os valores de  $n$  tais que Ana Paula consegue garantir a vitória, sem que dependa da estratégia de Kellem.

**Problema 4.** A sequência de inteiros positivos  $a_1, a_2, \dots$  é tal que  $a_1 = 1$  e  $a_n$  é o menor inteiro maior que  $a_{n-1}$  e que é coprimo com ao menos metade dos termos anteriores. Existe um número ímpar que não aparece na sequência?

*Nota:  $a$  e  $b$  são ditos coprimos se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .*

---