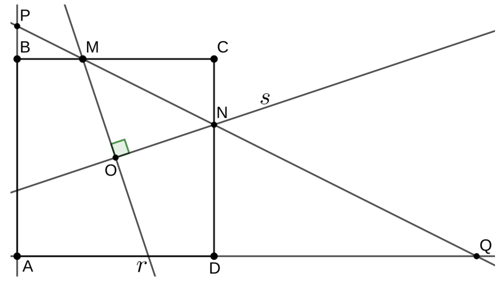
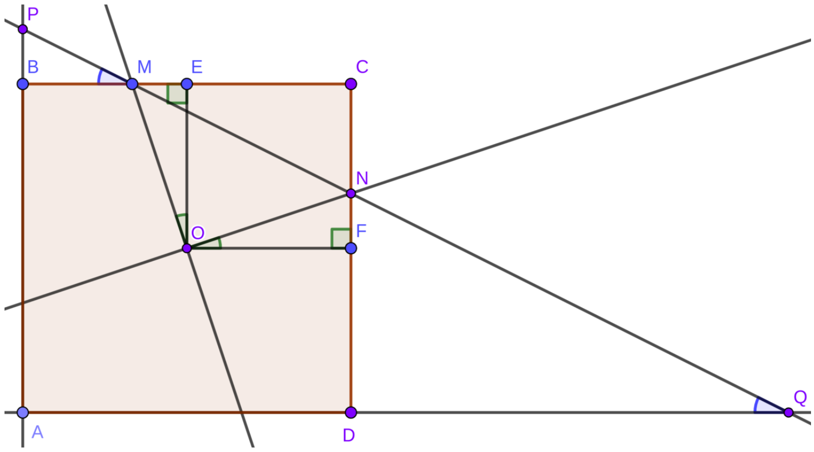
Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrado de centro O. Duas retas perpendiculares, r, s, que passam por O tocam os lados BC e CD em M, N, respectivamente. A reta MN toca os prolongamentos de AB e AD em P, Q, respectivamente. Prove que o produto $BP \cdot DQ$ é o dobro da área do triângulo MNC.

Nota: A figura abaixo não está em escala para fins de cálculo.



Solução:



A área do triângulo MNC pode ser calculada por $\dfrac{MC \cdot NC}{2}$. Considere a figura acima, em que E, F denotam os pontos médios dos lados AD e CD do quadrado, respectivamente. Os ângulos no vértice O são congruentes por r e s serem perpendiculares. Assim, pelo caso ALA, os triângulos MOE, NOF são congruentes e, em particular, $NF = ME$. Se l é metade do lado do quadrado, pode-se escrever que

$$DN = l + NF = l + EM.$$

$$BM = l - EM.$$

Pelo caso AA, os triângulos BPM, DNQ são semelhantes. Logo,

$$\frac{BP}{DN} = \frac{BM}{DQ} \Rightarrow BP \cdot DQ = (l + EM)(l - EM) = MC \cdot NC.$$

Problema 2. Sejam x, y números reais tais que $x, y \neq \frac{1}{2}$ e $x + y \neq 1$, com $\dfrac{x^2-4}{2x-1} + \dfrac{y^2-4}{2y-1} = x + y$. Determine o valor de $2xy - x - y$.

Solução: Removendo os denominadores e aplicando a distributiva, pode-se escrever que

$$(x^2-4)(2y-1) + (y^2-4)(2x-1) = x + y(2x-1)(2y-1) \Rightarrow (2x^2y - x^2 - 8y + 4) + (2xy^2 - y^2 - 8x + 4) =$$

$$= (x+y)(4xy - 2x - 2y + 1) \Rightarrow 2xy(x+y) - (x+y)^2 + 2xy - 8(x+y) + 8 = 4xy(x+y) - 2(x+y)^2 + (x+y).$$

Se $s = x + y, p = xy$,

$$2ps - s^2 + 2p - 8s + 8 = 4ps - 2s^2 + s \Rightarrow s^2 - 2ps + 2p - 9s + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$(s-1)(s-8) + 2p(1-s) = 0 \Rightarrow (s-1)(s-8-2p) = 0.$$

Por $s \neq 1$, então $s - 8 - 2p = 0 \Rightarrow 2p - s = -8$.

Resp.: $2xy - x - y = -8$.

Problema 3. Uma universidade está promovendo um evento de visitações em suas 8.088 dependências, representadas pelos pontos centrais dos quadrados no tabuleiro 4×2022 das figuras. Os roteiros são tais que:

- podem ter inicio em qualquer um desses lugares e variam na quantidade de locais visitados;
- podem ser percorridos de uma das três formas, como na figura 1: apenas em segmentos verticais, apenas em segmentos horizontais ou apenas em formatos retangulares;
- se o roteiro passa por um local, então dizemos que a pessoa o visita.

A figura 2 mostra dois roteiros que **NÃO** existem.

Sabendo que um roteiro é considerado diferente de outro se percorre um conjunto diferente de dependências, não importando a ordem, qual o número de roteiros que visitam o laboratório de Química?

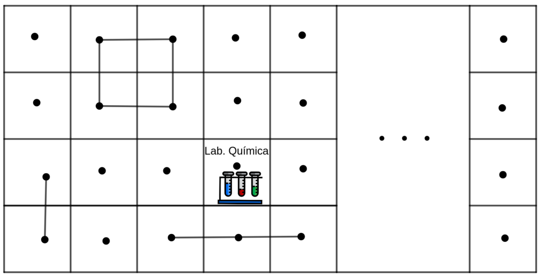


Figura 1

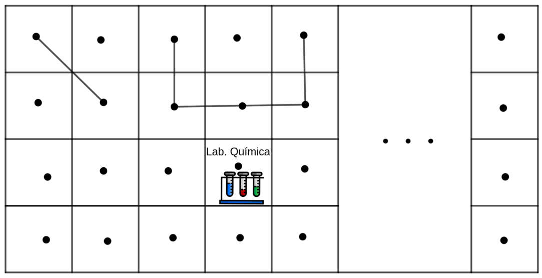
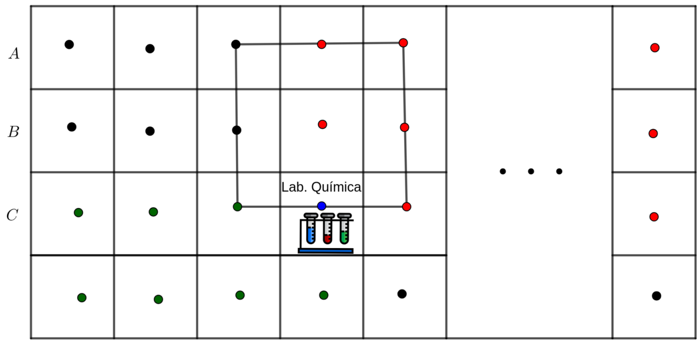


Figura 2

Solução 1: Considere a figura abaixo, onde foram coloridos $(2019 \cdot 3 - 1)$ pontos em vermelho e $(4 \cdot 2 - 1)$ em verde. Escolhendo um de cada cor, forma-se um retângulo com vértice superior direito vermelho e inferior esquerdo verde, que pode ser degenerado a um segmento horizontal, se ambos estiverem na horizontal, ou a um segmento vertical, se ambos estiverem na vertical. Os roteiros que visitam o laboratório de Química estão entre estes retângulos, como ilustrado, podendo haver a escolha do ponto em azul para ambas as funções: ponto superior direito ou inferior esquerdo.



- Se o ponto vermelho estiver na fileira A: isso oferece 8 roteiros como requeridos (cada vermelho tendo como par um dos verdes ou o azul). Por haver 2019 pontos nesta linha, são $8 \cdot 2019$ roteiros.

- Se o ponto vermelho estiver na linha B: apenas o ponto acima do lab garante 8 roteiros que o contêm. Os demais geram 5 cada. Total: $8 + 5 \cdot 2018$.

- Se o ponto vermelho estiver na linha C: se selecionado o azul, são 7 roteiros. Os demais vermelhos nesta linha produzem 7 roteiros cada. Total: $7 + 5 \cdot 2018$.

Total: $16.152 + 10.098 + 10.097 = 36.347$ roteiros que visitam o laboratório de Química.

Solução 2: - Segmento vertical: são 5, com 3 tendo o lab como extremo e 2 não.

- Segmento horizontal: há 3 pontos de início (à esquerda do lab) e 2018 de término (à direita do lab), então são $3 \cdot 2018$ segmentos horizontais que possuem o lab mas não como extremidade; 3 possuem o lab como extremo direito; 2018 têm o lab como extremo esquerdo. Total: $3 \cdot 2018 + 3 + 2018 = 8075$.

- Retângulo: se o lab estiver em uma aresta horizontal, há $8075 \cdot 3$ retângulos; se o lab estiver em uma aresta vertical, são $5 \cdot 2021$ retângulos. Ocorre, porém, contagem repetida dos retângulos que possuem o lab como algum dos 4 vértices, o que é feito em $3 \cdot 2021$ retângulos. Total: $8075 \cdot 3 + 5 \cdot 2021 - 3 \cdot 2021 = 28.267$.

Resp.: $5 + 8075 + 28.267 = 36.347$.

Problema 4. Um número inteiro positivo m é dito *precioso* se **NÃO** existir nenhum inteiro positivo n tal que n^2+2^n seja múltiplo de m.

a) Calcule o menor inteiro positivo precioso.

b) Mostre que existem infinitos primos **NÃO** preciosos.

Solução:

a) Fazendo algumas substituições com $n = 1, 2, 3, \ldots$, tem-se que 1, 2, 3, 4, 5 não são preciosos pois: 1 divide qualquer número; 2 divide $8 = 2^2 + 2^2$; 3 divide $1^2 + 2^1$; 4 divide $32 = 4^2 + 2^4$; 5 divide $100 = 6^2 + 2^6$. Suponha, por absurdo, que 6 não seja precioso. Logo, existe n inteiro positivo tal que

$$n^2 + 2^n \equiv\ 0 \pmod 6.$$

Em particular, $n^2 + 2^n$ é divisível por 2 e, portanto, par. Com isso, n é par.

Uma potência de 2 tem resto 2 ou 4 na divisão por 6, dependendo da paridade do expoente. Como n é par, então $2^n \equiv\ 4 \pmod 6$. Ou seja,

$$0 \equiv n^2 + 2^n \equiv n^2 + 4 \Rightarrow n^2 \equiv 2 \pmod 6.$$

Absurdo, pois nenhum quadrado perfeito possui resto 2 na divisão por 6. Assim, não existe n e 6 é precioso.

b) Pelo enunciado, qualquer divisor de um número da forma n^2+2^n é não precioso, e, em particular, todos os divisores primos de números desse modelo são não preciosos. Do item anterior, o conjunto de inteiros **NÃO** preciosos é não vazio. Suponha que este seja finito e igual a $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, onde $p_1 = 2$. Construa $n = p_2 \cdots p_k$ e considere $m = n^2 + 2^n$. Então, algum p_j, com $1 \leq j \leq k$, divide m. Isto é,

$$m \equiv\ 0 \pmod{p_j} \Rightarrow n^2 + 2^n \equiv\ 0 \pmod{p_j}.$$

- Se $p_j = 2$: $0 \equiv n^2 + 2^n \equiv n^2 \pmod{p_j} \Rightarrow 2$ divide n, o que é um absurdo pela construção de n.

- Se $p_j \neq 2$: $0 \equiv n^2 + 2^n \equiv 2^n \pmod{p_j} \Rightarrow p_j = 2$. Desse modo, o único primo que aparece na fatoração de m é 2. Se $m = 2^t$,

$$n^2 + 2^n = m = 2^t \Rightarrow n^2 = 2^n(2^{t-n} - 1)$$

e n é par. Absurdo.