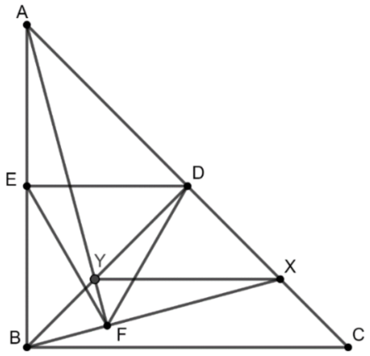
Problema 1. Seja ABC um triângulo isósceles e retângulo em B. Sejam D e E os pontos médios de AC e AB, respectivamente. O ponto F é tomado no interior de ABC, de modo que DEF seja um triângulo equilátero. As retas BF e AC se intersectam em X e as retas AF e BD se intersectam em Y. Mostre que $DX = DY$.

Solução:



Usando que D, E são pontos médios, segue, pelo teorema da base média, que

$$ED = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} = AE,$$

onde a penúltima igualdade decorre de $AB = BC$, pelo enunciado. Usando que DEF é equilátero e a igualdade acima,

$$EB = AE = ED = EF \Rightarrow A\hat{F}B = 90°.$$

De fato, a soma dos ângulos internos de AFB é tal que

$$2A\hat{F}E + 2E\hat{F}B = 180° \Rightarrow 90° = A\hat{F}E + E\hat{F}B = A\hat{F}B.$$

Note que BD é mediana do triângulo isósceles ABC referente à base AC. Com isso, é altura e $A\hat{D}B = 90°$. Desses dois ângulos, vale que Y é encontro das alturas do triângulo ABX. Segue que XY é perpendicular a AB. Do perpendicularismo original, XY é paralelo a BC. Portanto,

$$D\hat{X}Y = D\hat{C}B = 45°$$

$$D\hat{Y}X = D\hat{B}C = 45°,$$

com a última igualdade advinda do fato de que a mediana (BD) da base de um triângulo isósceles é bissetriz. Ou seja, o triângulo DXY é isósceles e se tem o resultado.

Problema 2. Sejam x e y números inteiros com

$$\frac{x^2-4}{2x-1}+\frac{y^2-4}{2y-1}=x+y.$$

Determine todas as soluções (x, y) para a equação.

Solução: Removendo os denominadores e aplicando a distributiva, pode-se escrever que

$$(x^2-4)(2y-1)+(y^2-4)(2x-1)=x+y(2x-1)(2y-1)\Rightarrow(2x^2y-x^2-8y+4)+(2xy^2-y^2-8x+4)=$$

$$=(x+y)(4xy-2x-2y+1)\Rightarrow 2xy(x+y)-(x+y)^2+2xy-8(x+y)+8=4xy(x+y)-2(x+y)^2+(x+y).$$

Passando todos os termos para o mesmo lado da igualdade,

$$(x+y)^2-2xy(x+y)+2xy-9(x+y)+8=0\Rightarrow(x+y-1)(x+y-8)+2xy(1-x-y)=0\Rightarrow(x+y-1)(x+y-8-2xy)=0.$$

Com isso,

Ou $x+y-1=0$: as soluções seriam $(x, y)=(x, 1-x)$. Este par, quando substituído, satisfaz a equação.

Ou $x+y-8-2xy=0$: $x(-2y+1)=8-y$. Assim, $-2y+1$ divide $8-y$. Esta afirmação, aliada ao fato de que $-2y+1$ divide ele mesmo, pode ser usada para se escrever que $-2y+1$ divide $-2(8-y)+(-2y+1)=-15$. Portanto, $-2y+1\in\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm15\}$. Essas 8 possibilidades produzem os pares

$$(x, y)=(8,0),(-7,1),(3,-1),(-2,2),(2,-2),(-1,3),(1,-7),(0,8),$$

que verificam a equação.

Resp.: $(x, y)\in\{(x, 1-x)\mid x\in\mathbb{Z}\}\cup\{(8,0),(-7,1),(3,-1),(-2,2),(2,-2),(-1,3),(1,-7),(0,8)\}$.

Problema 3. Há n fichas numa mesa, n um inteiro positivo. Ana Paula e Kellem jogam um jogo em turnos alternados, com Ana Paula sendo a primeira a jogar.

Em cada rodada, a jogadora atual pode retirar qualquer quantidade de fichas de 1 a $t+1$, onde t é o número de fichas removidas pela jogadora anterior. (Ana Paula é forçada a retirar exatamente 1 ficha em sua primeira jogada.) Ganha quem retirar a última ficha.

Determine todos os valores de n tais que Ana Paula consegue garantir a vitória, sem que dependa da estratégia de Kellem.

Solução: Os valores são $n \equiv 1, 4 \pmod 5$. Podemos conjecturar isso a partir de casos pequenos.

Então, ao receber o número m, Ana Paula joga da seguinte maneira:

- caso 1: se $m \equiv 1 \pmod 5$, tira 1 ficha;
- caso 2: se $m \equiv 2 \pmod 5$, tira 2 fichas;
- caso 3: se $m \equiv 3 \pmod 5$, tira 3 fichas;
- caso 4: se $m \equiv 4 \pmod 5$, tira 1 ficha.

Note que isso impede Ana de receber um número múltiplo de 5, pois, a cada momento, Kellem recebe um múltiplo de 5 podendo retirar no máximo 4 fichas, ou Kellem recebe um número da forma $5k+3$, podendo retirar 1 ou 2 fichas. Ainda, quando $n \equiv 1, 4 \pmod 5$, na primeira jogada, em que é obrigada a retirar 1 única ficha, Ana Paula joga de acordo com os casos 1 e 4, o que está de acordo com a estratégia.

Vamos mostrar que Ana Paula pode fazer essa escolha de jogada:

- caso 1: Kellem retirou $t \geq 1$ fichas, então sempre é possível.
- caso 2 Kellem retirou $t \geq 1$ fichas, então sempre é possível, pois $2 = 1 + 1$.
- caso 4: Kellem retirou $t \geq 1$ fichas, então sempre é possível.

No caso em que Kellem recebe $5k$:

- caso 3: se $m \equiv 3 \pmod 5$, temos que Kellem retirou $5k - (5j+3) = 5(k-j) - 3 \geq 5 - 3 = 2$ fichas, permitindo que Ana Paula retire $3 = 2 + 1$ fichas.

No caso em que Kellem recebe $5k+3$:

- caso 3: se $m \equiv 3 \pmod 5$, temos que Kellem retirou $5k + 3 - (5j+3) = 5(k-j) \geq 5$ fichas, permitindo que Ana Paula retire $3 \leq 5$ fichas.

Ainda a cada momento, após a jogada de Kellem, Ana Paula sempre consegue jogar, pois, na jogada de Ana Paula, $\lfloor \frac{m}{5} \rfloor$ não se altera, assim quando chega a $\lfloor \frac{m}{5} \rfloor = 0$, temos que Ana Paula recebeu um número da forma $1, 2, 3, 4$, pois Kellem não entrega múltiplo de 5. Se receber $1, 2, 3$ fichas, Ana Paula pode realizar casos $1, 2, 3$, entregando 0 fichas e ganhando o jogo. Se receber 4 fichas, ela entrega 3 fichas para Kellem, que pode tirar 1 ficha, restando 2 fichas para Ana Paula ou retirar 2 fichas, restando 1 ficha para Ana Paula, que em ambas as situações pode retirar todas as fichas restantes, vencendo.

Agora, quando $n \equiv 0, 2, 3 \pmod 5$, temos que Kellem recebe, após a primeira jogada, um número da forma $m \equiv 4, 1, 2 \pmod 5$. Assim, ela pode repetir a estratégia da Ana Paula que explicitamos acima, retirando. em sua primeira jogada, 1 ficha no caso $n \equiv 0, 2 \pmod 5$ e 2 fichas no caso $n \equiv 3 \pmod 5$. Desse modo, Kellem tem a estratégia vencedora para esses casos.

Problema 4. A sequência de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots$ é tal que $a_1 = 1$ e a_n é o menor inteiro maior que a_{n-1} e que é coprimo com ao menos metade dos termos anteriores. Existe um número ímpar que não aparece na sequência?

Nota: a *e* b *são ditos coprimos se* $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$.

Solução: A respostá é sim. Suponha que todo ímpar aparece na sequência. Então, segue por indução que $a_k \leq 2k-2$ para todo $k \geq 2$.

Lema 1. Existe n ímpar tal que $\varphi(n) \leq \frac{n}{4}$.

Demonstração. Tome $n = p_2 p_3 \cdots p_k$, em que p_i é o i-ésimo primo. Assim,

$$\frac{\varphi(n)}{2n} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\implies \frac{2n}{\varphi(n)} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^{-1} \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > \frac{1 - \frac{1}{p_1^{k+1}}}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)} \ldots \frac{1 - \frac{1}{p_k^{k+1}}}{\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}$$

$$\frac{2n}{\varphi(n)} > \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots + \frac{1}{p_1^k}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \cdots + \frac{1}{p_k^k}\right).$$

Pelo teorema fundamental da aritmética, cada inteiro positivo aparecerá em algum momento para k grande. Assim, para todo m existe k tal que

$$\frac{2n}{\varphi(n)} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

Tomando $m = 2^{14}$,

$$\frac{2n}{\varphi(n)} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{14}} + \cdots + \frac{1}{2^{14}} = 1 + 14 \times \frac{1}{2} = 8$$

$\square$

Suponha que $n = a_k$. Então, como $a_k \leq 2k - 2$ e a_k ímpar, $a_k < 2k - 2 \implies k - 1 > \frac{n}{2}$. Mas, pelo lema, há no máximo $\frac{n}{4}$ termos coprimos com n, enquanto que há mais de $\frac{n}{2}$ termos anteriores. Absurdo. Com isso, algum ímpar não aparece na sequência.