

**XII European Girls' Mathematical Olympiad**  
**Primeiro Teste de Seleção**  
**10 de fevereiro de 2023**

---

INSTRUÇÕES:

- Escreva seu nome e sobrenome em cada folha que usar. Eles são essenciais para sua identificação.
  - Escreva somente em um dos lados de cada folha.
  - Não resolva mais de uma questão por folha e indique qual problema está sendo resolvido. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
  - É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
  - Tudo o que você escrever deve ser justificado.
  - Todas as questões têm o mesmo valor.
  - Duração da prova: 4 horas e 30 minutos. Após esse período, as alunas terão 30 minutos para escanear e enviar as provas, mas não será mais permitido escrever nada.
  - Após o término, escaneie sua prova colocando as soluções **em ordem** (problema 1, depois 2, etc, e por fim o rascunho) e envie-a como um PDF único.
- 
- O PDF deve ser nomeado como “Nome\_Sobrenome\_Teste1EGMO”.
- 

► **PROBLEMA 1**

Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo com ortocentro  $H$  e  $\Gamma$  o circuncírculo do  $\triangle ABC$  de centro  $O$ . Considere  $N$  o centro do círculo que passa pelos pés das alturas do  $\triangle ABC$  e  $P$  a interseção da reta  $AN$  com o círculo  $\Gamma$ . Suponha que a reta  $AP$  seja perpendicular à reta  $OH$ . Prove que  $P$  pertence à reflexão da reta  $OH$  pela reta  $BC$ .

► **PROBLEMA 2**

Sejam  $p$  e  $q$  primos distintos ímpares. Mostre que

$$\left\lceil \frac{p^q + q^p - pq + 1}{pq} \right\rceil$$

é par.

*Nota:* A função teto associa, a cada número real  $x$ , o valor  $\lceil x \rceil$ , que denota o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

► **PROBLEMA 3**

Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reais positivos com  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Prove que

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} (\sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n}).$$

► **PROBLEMA 4**

No *reality show Big Sister Brasil*, diz-se que há uma *treta* se duas pessoas são amigas entre si e inimigas de uma terceira. Para fins de público, a emissora quer muitas tretas. Se amizade e inimizade são relações recíprocas, dadas  $n$  pessoas, qual o número máximo de tretas?