XII European Girls' Mathematical Olympiad
Segundo Teste de Seleção
24 de fevereiro de 2023

INSTRUÇÕES:

- Escreva seu nome e sobrenome em cada folha que usar. Eles são essenciais para sua identificação.
- Escreva somente em um dos lados de cada folha.
- Não resolva mais de uma questão por folha e indique qual problema está sendo resolvido. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido qualquer tipo de consulta, assim como o uso de calculadora. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos. Após esse período, as alunas terão 30 minutos para escanear e enviar as provas, mas não será mais permitido escrever nada.
- Após o término, escaneie sua prova colocando as soluções **em ordem** (problema 1, depois 2, etc, e por fim o rascunho) e envie-a como um PDF único.

`https://forms.gle/N12vr5pZw9KQnXsw7`

- O PDF deve ser nomeado como "Nome_Sobrenome_Teste2EGMO".

▸ **PROBLEMA 1**

Seja $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Encontre todas as funções estritamente crescentes $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $f(f(n)) = 3n$.

▸ **PROBLEMA 2**

Seja A um conjunto finito formado por números primos. Determine se existe um conjunto infinito B que satisfaz as seguintes condições:

(i) os fatores primos de qualquer elemento de B, estão em A;

(ii) nenhum termo de B divide outro elemento desse conjunto.

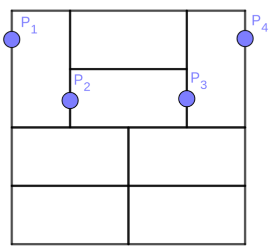
▸ **PROBLEMA 3**

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e L o pé da bissetriz de $\angle A$. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros de $\triangle ABL$ e $\triangle ACL$ respectivamente e sejam B_1 e C_1 as projeções de C e B pelas bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ respectivamente. O incírculo do $\triangle ABC$ tangencia AC e AB nos pontos B_0 e C_0 respectivamente e as bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ encontram a mediatriz de AL nos pontos Q e P respectivamente. Prove que as cinco retas PC_0, QB_0, O_1C_1, O_2B_1 e BC são todas concorrentes.

▸ **PROBLEMA 4**

Um grilo quer se deslocar por um tabuleiro $2n \times 2n$ que está inteiramente coberto por dominós, sem que haja sobreposição. Ele pula pelas linhas verticais do tabuleiro, sempre indo do ponto médio do segmento vertical de um quadradinho 1×1 para outro ponto médio de segmento vertical, de acordo com as regras:

(i) Quando o dominó estiver horizontal, o grilo pula para o segmento vertical oposto (como de P_2 para P_3);
(ii) Quando o dominó estiver vertical para baixo em relação à posição dele, o grilo pula diagonalmente para baixo (como de P_1 para P_2);
(iii) Quando o dominó estiver vertical para cima em relação à posição dele, o grilo pula diagonalmente para cima (como de P_3 para P_4).
A imagem ilustra um possível recobrimento e trajeto no tabuleiro 4×4.



Considerando que o ponto de partida está na primeira linha vertical e o de chegada está na última linha vertical, prove que, independentemente do recobrimento do tabuleiro e da altura que o grilo começa seu caminho, o caminho termina na mesma altura inicial.