



## INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
- A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
- Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
- Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, além disso, escreva "Rascunho".
- Os enunciados devem ser devolvidos e a prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
- Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!

---

**Problema 1.** Definimos a sequência  $(a_n)_n$  de forma recursiva, onde os termos iniciais são  $a_1 = 12$  e  $a_2 = 24$ , e para  $n \geq 3$ , temos

$$a_n = a_{n-2} + 14.$$

- (a) O número 2023 aparece na sequência?
- (b) Mostre que não existem quadrados perfeitos nessa sequência.

**Problema 2.** Sejam  $a, b, c$  números reais tais que  $a^n + b^n = c^n$  para três valores inteiros positivos consecutivos de  $n$ . Prove que  $abc = 0$ .

**Problema 3.** Em um triângulo acutângulo  $ABC$ , sejam  $D$  e  $E$  os pés das alturas relativas aos vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente, e seja  $M$  o ponto médio de  $AC$ . O círculo que passa por  $D$  e é tangente à reta  $BE$  em  $B$  intersecta a reta  $BM$  em um ponto  $F$ ,  $F \neq B$ . Mostre que  $FM$  é bissetriz de  $\angle AFD$ .

**Problema 4.** Determine todos os inteiros positivos  $n$  para os quais existe um tabuleiro  $n \times n$ , onde podemos escrever  $n$  vezes cada um dos números de 1 a  $n$  (um número em cada casa), de modo que as  $n$  somas dos números em cada linha deixem  $n$  restos distintos na divisão por  $n$ , e as  $n$  somas dos números em cada coluna deixem  $n$  restos distintos na divisão por  $n$ .