



INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
- A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
- Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
- Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, além disso, escreva "Rascunho".
- Os enunciados devem ser devolvidos e a prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
- Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!

Problema 1. Definimos a sequência $(a_n)_n$ de forma recursiva, onde os termos iniciais são $a_1 = 12$ e $a_2 = 24$, e para $n \geq 3$, temos

$$a_n = a_{n-2} + 14.$$

- (a) O número 2023 aparece na sequência?
(b) Mostre que não existem quadrados perfeitos nessa sequência.

Problema 2. Sejam a, b, c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos consecutivos de n . Prove que $abc = 0$.

Problema 3. Em um triângulo acutângulo ABC , sejam D e E os pés das alturas relativas aos vértices A e B , respectivamente, e seja M o ponto médio de AC . O círculo que passa por D e é tangente à reta BE em B intersecta a reta BM em um ponto F , $F \neq B$. Mostre que FM é bissetriz de $\angle AFD$.

Problema 4. Determine todos os inteiros positivos n para os quais existe um tabuleiro $n \times n$, onde podemos escrever n vezes cada um dos números de 1 a n (um número em cada casa), de modo que as n somas dos números em cada linha deixem n restos distintos na divisão por n , e as n somas dos números em cada coluna deixem n restos distintos na divisão por n .