



INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
- A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
- Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
- Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, além disso, escreva "Rascunho".
- Os enunciados devem ser devolvidos e a prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
- Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!

Problema 1. Sejam a, b, c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos consecutivos de n . Prove que $abc = 0$.

Problema 2. Dado n inteiro positivo, defina T_n como a quantidade de quádruplas de inteiros positivos da forma (a, b, x, y) tais que $a > b$ e $n = ax + by$. Prove que T_{2023} é ímpar.

Problema 3. Seja S um conjunto não vazio de inteiros positivos e AB um segmento com, inicialmente, apenas os pontos A e B pintados de vermelho. Uma operação consiste em escolher dois pontos distintos X e Y pintados de vermelho e um inteiro $n \in S$, e pintar de vermelho os n pontos A_1, A_2, \dots, A_n do segmento XY tais que $XA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nY$ e $XA_1 < XA_2 < \dots < XA_n$. Determine o menor inteiro positivo m para o qual existe um subconjunto S de $\{1, 2, \dots, m\}$ tal que após um número finito de operações conseguimos pintar de vermelho o ponto K no segmento AB definido por $\frac{AK}{KB} = \frac{2709}{2022}$. Além disso, determine a quantidade de tais subconjuntos para tal valor de m .

Problema 4. Dados dois pontos P e Q , Jaqueline tem uma régua que lhe permite traçar a reta PQ . Jaqueline também possui um aparato especial que lhe permite construir o círculo de diâmetro PQ . Além disso, sempre que dois círculos (ou um círculo e uma reta, ou duas retas) se encontram, ela pode nomear os pontos de encontro com um lápis e traçar mais retas e círculos usando seus dispositivos a partir dos pontos nomeados. Inicialmente, ela possui um triângulo escaleno acutângulo ABC . Mostre que Jaqueline é capaz de desenhar o incentro do triângulo ABC .