

INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
- A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
- Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
- Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, além dos dois, escreva "Rascunho".
- A prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
- Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!

Problema 1. Uma *palavra* é uma sequência de letras maiúsculas do nosso alfabeto (isto é, há 26 possíveis letras). Uma palavra é chamada de *palíndromo* se tem pelo menos duas letras e ela é a mesma palavra se lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, as palavras ARARA e NOON são palíndromos, mas BOBO e A não são palíndromos.

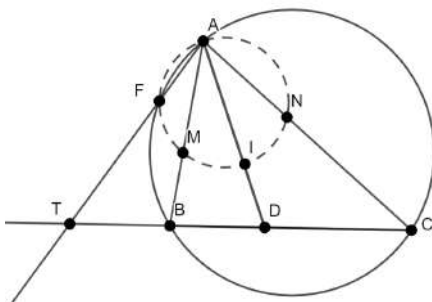
Dizemos que uma palavra x contém uma palavra y se existem letras consecutivas de x que juntas formam y . Por exemplo, a palavra ARARA contém a palavra RARA e também a palavra ARARA, mas não contém a palavra ARRA. Calcule a quantidade de palavras de 14 letras que contém algum palíndromo.

Problema 2. Mostre que não existem triplas de inteiros não negativos (x, y, z) satisfazendo a equação

$$x^2 = 5^y + 3^z.$$

Problema 3. No triângulo escaleno ABC, sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC. Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC, respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC. Seja J a intersecção de TI com a paralela a FI que passa por D. Prove que AJ é perpendicular à BC.

Nota: o incentro de um triângulo é a intersecção das bissetrizes internas.



Problema 4. Encontre todos os inteiros positivos a , b e c tais que $3ab = 2c^2$ e $a^3 + b^3 + c^3$ seja o dobro de um número primo.