



INSTRUÇÕES:

- Verifique se esta prova corresponde ao seu nível.
- A prova tem 4 questões, com 4h30 de duração.
- Use apenas um lado da folha e escreva apenas um problema por folha.
- Cada folha deve conter seu nome e o número do problema. No rascunho, além dos dois, escreva "Rascunho".
- A prova permanecerá em sigilo até 23:00, horário de Brasília.
- Justifique todo o seu raciocínio e tenha uma boa prova!

Problema 1. Os números reais não nulos a, b e c são tais que $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab = a^3 + b^3 + c^3$. Calcule o(s) valor(es) assumido(s) por $a + b + c$.

Problema 2. No triângulo escaleno ABC , sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC . Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC , respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC . Seja J a intersecção de TI com a paralela a FI que passa por D . Prove que AJ é perpendicular à BC .

Problema 3. Seja C o conjunto de pontos (x, y) de coordenadas inteiras no plano com $1 \leq x \leq 900$ e $1 \leq y \leq 1000$. Um polígono P cujos vértices estão em C é dito *especial* se P tem exatamente zero ou dois vértices em cada linha e cada coluna e todos os ângulos internos de P são 90° ou 270° . Determine o maior valor de k tal que podemos pintar k pontos de C de modo que qualquer subconjunto desses k pontos não seja o conjunto de vértices de um polígono especial.

Problema 4. Encontre todos os inteiros a para os quais existem infinitos inteiros positivos n tais que n divide $\varphi(n)! + a$.

Nota: $\varphi(n)$ denota, para n inteiro positivo, a quantidade de números inteiros positivos m menores ou iguais a n que possuem $\text{mdc}(n, m) = 1$. Por exemplo, $\varphi(6) = 2$, pois apenas 1 e 5 são menores ou iguais a 6 e verificam que $\text{mdc}(6, 1) = 1 = \text{mdc}(6, 5)$.