Problema 1. Definimos a sequência $(a_n)_n$ de forma recursiva, onde os termos iniciais são $a_1 = 12$ e $a_2 = 24$, e para $n \geq 3$, temos

$$a_n = a_{n-2} + 14.$$

(a) O número 2023 aparece na sequência?

(b) Mostre que não existem quadrados perfeitos nessa sequência.

Solução:

a) Como a_1 é par, então a_3 será par. Por a_2 ser par, ocorre que a_4 é par. Procedendo a partir de a_3, a_4, tem-se que a_5, a_6 são pares. Repetindo tal procedimento, como o incremento é 14, que é par, todos os a_n são pares. Assim, 2023, que é ímpar, não aparece.

b) Olhando a equação definidora de a_n módulo 7, isto é, analisando o resto deixado na divisão de a_n por 7, vale que

$$a_n \equiv a_{n-2} \pmod 7.$$

Ou seja, a_n possui mesmo resto que a_{n-2} quando dividido por 7.

Por $a_1 = 12 \equiv 5 \pmod 7$ e $a_2 = 24 \equiv 3 \pmod 7$, então os únicos restos possíveis são 5 e 3, os quais não são restos que quadrados perfeitos podem deixar na divisão por 7. Desse modo, não existem quadrados perfeitos nessa sequência.

Problema 2. Sejam a, b, c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos consecutivos de n. Prove que $abc = 0$.

Solução: Suponha que $abc \neq 0$. Ou seja, $a, b, c \neq 0$. Dividindo a equação por c^n, tem-se que

$$(\underbrace{\frac{a}{c}}_{x\neq 0.})^n + (\underbrace{\frac{b}{c}}_{y\neq 0.})^n = 1 \Rightarrow x^n + y^n = 1.$$

De maneira semelhante, vale que

$$x^{n+1} + y^{n+1} = 1.$$
$$x^{n+2} + y^{n+2} = 1.$$

Em particular,

$$x^{n+1} + y^{n+1} = x^n + y^n \Rightarrow x^n(x-1) + y^n(y-1) = 0 \Rightarrow (\frac{x}{y})^n = \frac{-(y-1)}{(x-1)}$$

$$x^{n+2} + y^{n+2} = x^{n+1} + y^{n+1} \Rightarrow x^{n+1}(x-1) + y^{n+1}(y-1) = 0 \Rightarrow (\frac{x}{y})^{n+1} = \frac{-(y-1)}{(x-1)},$$

onde a divisão por $x - 1$ é válida porque, se $x = 1$, então $a = c$. Com isso,

$$a^n + b^n = c^n \Rightarrow b^n = 0 \Rightarrow b = 0. \text{ Contradição.} \tag{1}$$

Dessas duas igualdades,

$$(\frac{x}{y})^{n+1} = (\frac{x}{y})^n \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow a = b.$$

Substituindo em duas das equações originais,

$$\begin{cases} 2a^n = c^n \\ 2a^{n+1} = c^{n+1} \end{cases} \Rightarrow a = c,$$

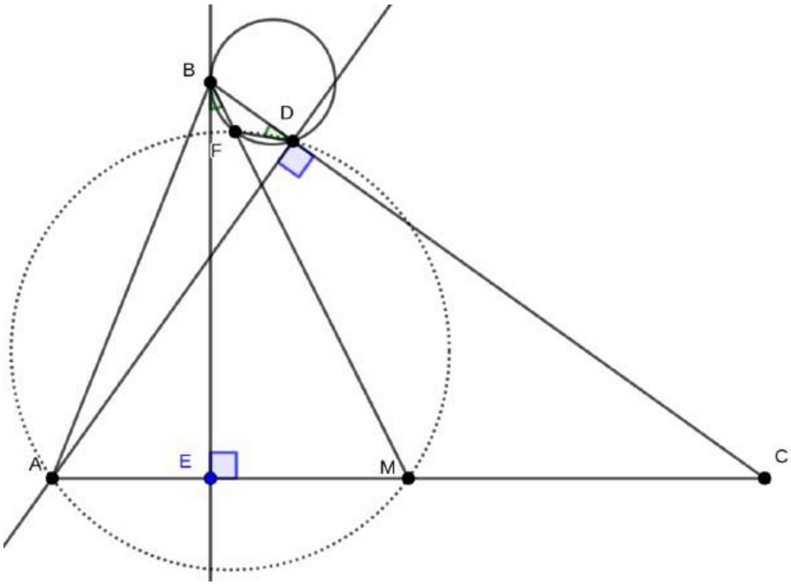
o que é um absurdo, como visto em (1). Portanto, a hipótese assumida é falsa e alguma das variáveis é zero.

Problema 3. Em um triângulo acutângulo ABC, sejam D e E os pés das alturas relativas aos vértices A e B, respectivamente, e seja M o ponto médio de AC. O círculo que passa por D e é tangente à reta BE em B intersecta a reta BM em um ponto F, $F \neq B$. Mostre que FM é bissetriz de $\angle AFD$.

Solução: Pela tangência entre o circuncírculo do triângulo BFD e o segmento BE, tem-se que $E\hat{B}F = B\hat{D}F$. Com isso,

$$A\hat{M}F = E\hat{M}B = 90^\circ - E\hat{B}F = 90^\circ - B\hat{D}F = A\hat{D}F.$$

Segue que $AMDF$ é quadrilátero cíclico.



Como ACD é triângulo retângulo e M é ponto médio da hipotenusa, então DM = metade da hipotenusa = AM.

Desse modo, AM e MD são duas cordas com comprimento igual no círculo pontilhado e, então, enxergam um ângulo igual. Portanto, $A\hat{F}M = M\hat{F}D$.

Problema 4. Determine todos os inteiros positivos n para os quais existe um tabuleiro $n \times n$, onde podemos escrever n vezes cada um dos números de 1 a n (um número em cada casa), de modo que as n somas dos números em cada linha deixem n restos distintos na divisão por n, e as n somas dos números em cada coluna deixem n restos distintos na divisão por n.

Solução: Somando os n^2 números dispostos nas n^2 casas, tem-se o valor

$$n(1+2+\cdots+n) = n \cdot \frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Pela construção proposta na questão, esta soma tem que ser igual, módulo n, à soma dos n restos possíveis na divisão por n, isto é,

$$0+1+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Desse modo,

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \equiv \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n^2+1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Se n par, então $\frac{n}{2}$ é número inteiro e $n^2+1 \equiv 1 \pmod{n}$. Assim,

$$\frac{n(n^2+1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \cdot 1 = \frac{n}{2} \pmod{n},$$

o que contradiz a congruência a 0 acima.

Portanto, n é ímpar. Tal condição necessária é mostrada suficiente se for exibida uma construção para qualquer n ímpar. Esta pode ser tomada em alguns exemplos como:

1)

0	0	0	0	$\dots$	0	0	0
1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	1
1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	2
1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	3
1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	$n-2$
1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	$n-1$

Veja que esse tabuleiro funciona, pois, verificando por linha:
A primeira linha deixa resto 0 na divisão por n (ou seja, a soma da linha é congruente a zero módulo n).
A soma $1+2+\dots n-2+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$, pois n é ímpar.
Então, a soma da linha i deixa resto i.

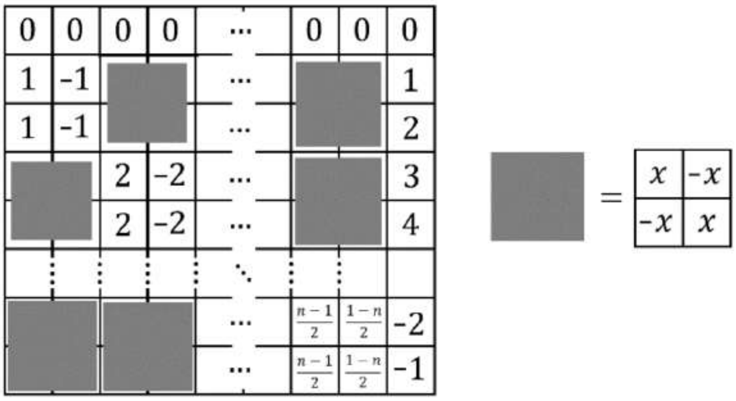
Agora, vamos verificar por coluna.
A soma da coluna i, para $1 \leq i \leq n-1$, é

$$0+(n-1)\cdot i \equiv -i \equiv n-i \pmod{n}$$

Então, atingimos todos os restos de 1 até $n-1$.
Agora, a última coluna tem soma igual a 0, como visto acima.

Também é fácil de verificar, por construção, que tem n números para cada resto no tabuleiro.

2)



Aparecem os números de $\frac{1-n}{2}$ a $\frac{n-1}{2}$, o que equivale, módulo n, a se ter os números de 1 a n. O valor de x no diagrama pode ser qualquer um de 1 a $\frac{n-1}{2}$, com tais escolhas duplicadas viáveis porque, depois de se dispor os números conforme a imagem, ainda resta uma quantidade par de cada um deles.

Verificando por linha, cada linha fica congruente ao valor na última coluna.
Verificando por coluna, a coluna i fica congruente a $2i$. Como n é ímpar, o conjunto $\{2i | 1 \leq i \leq n-1\}$ varia de 1 a $n-1$.
De fato, se $2i \equiv 2j \pmod{n}$, temos que $n|2(i-j) \implies n|i-j \implies i=j$, em que a primeira implicação ocorre por n ser ímpar e a segunda porque $i-j<n$.
A última coluna tem todos os restos, e como visto acima, a soma é congruente a 0 módulo n.
Logo, esse tabuleiro também é um exemplo para todo n ímpar.