Problema 1. Sejam a, b, c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos consecutivos de n. Prove que $abc = 0$.

Solução: Suponha que $abc \neq 0$. Ou seja, $a, b, c \neq 0$. Dividindo a equação por c^n, tem-se que

$$(\underbrace{\frac{a}{c}}_{x \neq 0.})^n + (\underbrace{\frac{b}{c}}_{y \neq 0.})^n = 1 \Rightarrow x^n + y^n = 1.$$

De maneira semelhante, vale que

$$x^{n+1} + y^{n+1} = 1.$$
$$x^{n+2} + y^{n+2} = 1.$$

Em particular,

$$x^{n+1} + y^{n+1} = x^n + y^n \Rightarrow x^n(x-1) + y^n(y-1) = 0 \Rightarrow (\frac{x}{y})^n = \frac{-(y-1)}{(x-1)}$$

$$x^{n+2} + y^{n+2} = x^{n+1} + y^{n+1} \Rightarrow x^{n+1}(x-1) + y^{n+1}(y-1) = 0 \Rightarrow (\frac{x}{y})^{n+1} = \frac{-(y-1)}{(x-1)},$$

onde a divisão por $x - 1$ é válida porque, se $x = 1$, então $a = c$. Com isso,

$$a^n + b^n = c^n \Rightarrow b^n = 0 \Rightarrow b = 0. \text{ Contradição.} \tag{1}$$

Dessas duas igualdades,

$$(\frac{x}{y})^{n+1} = (\frac{x}{y})^n \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow a = b.$$

Substituindo em duas das equações originais,

$$\begin{cases} 2a^n = c^n \\ 2a^{n+1} = c^{n+1} \end{cases} \Rightarrow a = c,$$

o que é um absurdo, como visto em (1). Portanto, a hipótese assumida é falsa e alguma das variáveis é zero.

Problema 2. Dado n inteiro positivo, defina T_n como a quantidade de quádruplas de inteiros positivos da forma (a, b, x, y) tais que $a > b$ e $n = ax + by$. Prove que T_{2023} é ímpar.

Solução: Pode-se parear as quádruplas que satisfazem a equação do enunciado, da forma: (a, b, x, y) a verifica se, e somente se, $(a', b', x', y') = (x + y, x, b, a - b)$ a verifica. De fato,

$$a'x' + b'y' = (x + y)b + x(a - b) = bx + by + ax - bx = ax + by$$

e, assim, (a, b, x, y) é quádrupla da questão se, e somente se, (a', b', x', y') o é.

Desse modo, para mostrar que T_{2023} é ímpar, contam-se as quádruplas mapeadas nelas próprias, o que ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x \end{cases} \Rightarrow n = (x + y)x + xy = x(x + 2y).$$

Como se escreveu n como produto de dois números inteiros, onde $x + 2y > x$ e $x + 2y \equiv x (\text{mod } 2)$, busquemos duplas de valores que multiplicados dão 2023 e que possuem mesma paridade. De $2023 = 7 \cdot 17^2$, tem-se as possibilidades $(x, x + 2y) = (1, 2023), (7, 289), (17, 119)$. Pela quantidade ímpar de quádruplas não pareadas com outras distintas, T_{2023} é ímpar.

Problema 3. Seja S um conjunto não vazio de inteiros positivos e AB um segmento com, inicialmente, apenas os pontos A e B pintados de vermelho. Uma operação consiste em escolher dois pontos distintos X e Y pintados de vermelho e um inteiro $n \in S$, e pintar de vermelho os n pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ do segmento XY tais que $XA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nY$ e $XA_1 < XA_2 < \cdots < XA_n$. Determine o menor inteiro positivo m para o qual existe um subconjunto S de $\{1, 2, ..., m\}$ tal que após um número finito de operações conseguimos pintar de vermelho o ponto K no segmento AB definido por $\frac{AK}{KB} = \frac{2709}{2022}$. Além disso, determine a quantidade de tais subconjuntos para tal valor de m.

Solução: Tomemos, sem perda de generalidade, AB como sendo o intervalo $(0, 1)$. Dessa forma, o ponto K é dado por

$$K = \frac{2709}{2709 + 2022} = \frac{2709}{4731} = \frac{903}{1577}.$$

Primeiro, observe que tal operação sempre gera pontos vermelhos que são racionais, e que se escolhemos $X_1 = p_1/q_1$ e $X_1 = p_2/q_2$ (pontos distintos vermelhos), e $n \in S$, serão pintados de vermelho os pontos

$$\frac{p_1q_2(n+1-t) + p_2q_1t}{q_1q_2(n+1)}, \tag{2}$$

onde $1 \leq t \leq n$. Agora, seja $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$, com $n_i < n_{i+1}$, para $1 \leq i \leq r-1$, e defina $P_S := \prod_{i=1}^{r}(n_i + 1)$.

Afirmação: Os fatores primos do denominador de um racional que representa um ponto vermelho, também são fatores primos de P_S.

De fato, procedemos por indução. Observe que para aplicar a operação pela primeira vez escolhemos um $n_i \in S$, e A e B (que são os únicos pontos vermelhos), para pintar os pontos

$$\frac{t}{n_i + 1}, \text{ onde } 0 \leq t \leq n_i + 1,$$

e como $n_i + 1 \mid P_S$, nosso caso base fica mostrado. Agora, suponha que após k operações, os denominadores dos pontos vermelhos marcados até então, têm seus fatores primos dividindo P_S. Escolhendo $n_j \in S$ e aplicando mais uma operação nos pontos pintados de vermelho X_1 e X_2, como definidos acima, por (2) vemos que o denominador desses pontos é $(n_j+1)q_1q_2$. Pela hipótese de indução, q_1 e q_2 satisfazem a afirmação, e como $n_j+1 \mid P_S$, os fatores primos de $(n_j + 1)q_1q_2$ também dividem P_S, o que conclui a indução.

Dessa forma, como $K = \dfrac{903}{1577} = \dfrac{903}{19 \cdot 83}$, para que K seja pintado de vermelho, precisamos que

$$19 \cdot 83 \mid P_S = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_r + 1),$$

ou seja, devemos ter $19 \mid n_i + 1$ e $83 \mid n_j + 1$, para algum par i, j. Como queremos o menor n_r possível, tomamos $83 \mid n_r + 1$, donde $n_r \geq 82$, e com isso $m \geq 82$.

Vamos mostrar que se 82 e algum número da forma $19l - 1$, com $1 \leq l \leq 4$ pertencem à S, conseguimos pintar K de vermelho, o que prova que de fato $m = 82$. Podemos tratar, SPG, apenas o caso em que $18, 82 \in S$. Assim, começamos dividindo AB em 19 segmentos $AX_1 = X_1X_2 = \cdots = X_{18}B$. Note que

$$K = \frac{903}{19 \cdot 83} = \frac{10}{19} + \frac{73}{19 \cdot 83}, \tag{3}$$

donde temos $10/19 < K < 11/19$, e agora escolhemos os pontos X_{10} e X_{11}, para dividir o segmento $X_{10}X_{11}$ em 83 partes $X_{10}Y_1 = Y_1Y_2 = \cdots = Y_{82}X_{11}$, e assim por (3) vemos que $K = Y_{73}$, o que finaliza a primeira parte do problema.

Para a contagem de subconjuntos, queremos aqueles de $\{1, 2, \ldots, 82\}$ que possuem 82 e algum número da forma $19l-1$, com $1 \leq l \leq 4$. Assim, basta contarmos todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 81\}$ e retirar aqueles que não possuem números da forma $19l - 1$, o que nos dá $2^{81} - 2^{81-4} = 15 \cdot 2^{77}$.

Problema 4. Dados dois pontos P e Q, Jaqueline tem uma régua que lhe permite traçar a reta PQ. Jaqueline também possui um aparato especial que lhe permite construir o círculo de diâmetro PQ. Além disso, sempre que dois círculos (ou um círculo e uma reta, ou duas retas) se encontram, ela pode nomear os pontos de encontro com um lápis e traçar mais retas e círculos usando seus dispositivos a partir dos pontos nomeados. Inicialmente, ela possui um triângulo escaleno acutângulo ABC. Mostre que Jaqueline é capaz de desenhar o incentro do triângulo ABC.

Solução:

Lema 1: Dado um triângulo ABC, Jaqueline consegue traçar a reta perpendicular a BC passando por A. Mais ainda, ela pode traçar as 3 alturas, os pés das alturas e o ortocentro do triângulo.

Prova: Jaqueline deve desenhar os círculos de diâmetro AB e AC. Estes círculos se tocam pela segunda vez em D. Como $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, o ponto D está na reta BC, mesmo que não necessariamente no segmento BC. Agora basta Jaqueline traçar a reta que liga A e D e temos a reta perpendicular a BC passando por A. O restante segue de maneira análoga para os outros vértices, e o ortocentro será o encontro das alturas.

Lema 2: Dado um triângulo ABC acutângulo tal que $AB \neq AC$, Jaqueline pode achar o ponto A', antipodal a A no circuncírculo de ABC. Mais ainda, ela pode traçar o circuncírculo de ABC.

Prova: Usando o Lema 1, Jaqueline constrói E e F os pés das alturas relativas a B e C, respectivamente, e H o ortocentro do triângulo. Ela traça as retas BC e EF, que se encontram em K, pois $AB \neq AC$. Usando o Lema 1 novamente, ela traça a reta l, perpendicular a AK passando por H, bem como o pé da altura, $l \cap AK$, que chamaremos de L. (Note que A, E, F, H e L estão em um mesmo círculo, e por potência de ponto em K, temos que $KL \cdot KA = KE \cdot KF$. E como $EFCB$ é cíclico, $KE \cdot KF = KB \cdot KC$. Logo $KL \cdot KA = KB \cdot KC$ o que mostra que L está no circuncírculo de ABC. Em particular, como $\angle ALH = 90°$, a reta l contém o ponto A' antipodal a A no circuncírculo.) Para traçar A', basta intersectar l com a reta perpendicular a A passando por EF. Para traçar o circuncírculo basta tomar o círculo de diâmetro AA'.

Lema 3: Dado um triângulo ABC acutângulo, Jaqueline consegue traçar as mediatrizes.

Prova: Usando o Lema 1, ela constrói a reta r perpendicular a BC passando por A, e F o pé da altura relativa a C. Como o triângulo é acutângulo, $F \notin r$. Agora ela desenha a reta s perpendicular a r passando por F. A reta s é paralela à reta BC e Jaqueline pode traçar os pés das alturas de B e C em s, que chamaremos de B' e C'. Então $BCC'B'$ é um retângulo, e o encontro das suas diagonais $P = B'C \cap BC'$ se encontra na mediatriz de BC. A reta perpendicular a BC por P é a mediatriz de BC.

Finalmente, com esses 3 Lemas, Jaqueline consegue achar o incentro. Usando o Lema 2, ela desenha o circuncírculo do triângulo ABC. Com o Lema 3, ela traça as mediatrizes. As interseções de cada mediatriz com o arco menor de cada lado, dá os pontos médios dos arcos menores A'', B'', C''. O incentro é a interseção das retas AA'', BB'' e CC''.